

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

M. Karimov

Oliy matematika

(O'quv qo'llanma)

(I-qism)

Toshkent - 2005

«Oliy matematika» fanidan o'quv qo'llanma
(I-qism)
M. Karimov.
Toshkent Moliya Instituti, 2005 yil 110 bet.

Ushbu o'quv qo'llanma oliy matematikaning chiziqli algebra, tekislik va fazoda analitik geometriya elementlarini o'z ichiga oladi.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'limning bilim va ta'lim sohasi – «Biznes va boshqaruv», «Moliya», «Bank ishi», «Soliq va soliqqa tortish», «Buxgalteriya hisobi va audit», «Kasb ta'limi» ta'lim yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, yangi dastur va davlat ta'lim standartlariga mos keladi. Har bir mavzu mustaqil ishlash uchun misollar bilan to'ldirildi.

O'quv qo'llanma "Matematika" kafedrasi majlisida muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan.

10 may 2005y. 15- son majlisi bayoni.

"Matematika" kafedrasi mudiri:

Prof. Q.Safayeva

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining Toshkent Moliya instituti qoshidagi oliy o'quv yurtlararo ilmiy - uslubiy kengashda muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan.

Rektor vazifasini bajaruvchi:

Prof.A.Vahobov

Tuzuvchi : fizika-matematika fanlari nomzodi,
dots. M. Karimov

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari nomzodi,
dots. R. Mo'minova;
fizika-matematika fanlari nomzodi,
dots. B. A. Xudoyorov

Toshkent Moliya Instituti, 2005 y.

1- MA'RUZA. MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

Reja:

1. Matritsa haqida tushuncha.

2. Matritsalar ustida amallar.

1. a_{ik} haqiqiy sonlar n ta satr va m ta ustunda joylashgan quyidagi to'g'ri to'rtburchak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

shaklidagi jadvalga $n \times m$ o'lchamli **matritsa** deyiladi.

a_{ik} haqiqiy sonlar matritsa elementlari deb ataladi.

$1 \times m$ o'lchamli matritsaga **satr matritsa**, $n \times 1$ o'lchamli matritsaga **ustun matritsa** deyiladi. **Nol matritsa** deb, xar bir elementi nolga teng bo'lgan matritsaga aytiladi.

$n \times m$ o'lchamli $A = (a_{ik})$ va $B = (b_{ik})$ matritsalar berilgan bo'lsin. Agar matritsalarining barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, matritsalar o'zaro teng deyiladi va $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

2. O'lchamlari aynan teng A va B matritsalarini qo'shganda, ularning mos elementlari qo'shiladi: $A + B = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik})$.

Haqiqiy son matritsaga ko'paytirilganda, matritsaning har bir elementi shu songa ko'paytiriladi: $\kappa (a_{ik}) = (\kappa a_{ik})$.

Misol. Amallarni bajaring:

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Matritsalarini qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga bo'ysunadi: 1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $\kappa (A + B) = \kappa A + \kappa B$; 4) $\kappa (nA) = (\kappa n) A$; 5) $(\kappa + n) A = \kappa A + nA$.

Agar A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A va B matritsalar **o'zaro zanjirlangan matritsalar** deyiladi. O'zaro zanjirlangan matritsalarini ko'paytirish mumkin.

$n \times m$ o'lchamli $A = (a_{ik})$ matritsani $m \times p$ o'lchamli $B = (b_{ik})$ matritsaga ko'paytmasi $n \times p$ o'lchamli $C = (c_{ik})$ matritsaga teng bo'lib, uning c_{ik} elementlari quyidagicha aniqlanadi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk},$$

ya'ni c_{ik} element A matritsa i - satri elementlarining B matritsa k - ustuni mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matritsalarini ko'paytirish quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1. $(kA)B = k(AB)$; 3. $(A+B)C = AC + BC$;
2. $A(B+C) = AB + AC$; 4. $A(BC) = (AB)C$.

Matritsalarining ko'paytmasi ko'paytuvchi matritsalar nolmas bo'lishiga qaramasdan, nol matritsani berishi xam mumkin.

A va B matritsalarining ko'paytmasi har doim o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunavermaydi, ya'ni umuman olganda $AB \neq BA$. $AB = BA$ tenglikni qanoatlantiruvchi A va B matritsalariga **o'rin almashinuvchi** matritsalar deyiladi.

Berilgan $n \times m$ o'lchamli A matritsaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa, hosil bo'lgan $m \times n$ o'lchamli matritsaga A matritsaning **transponirlangan matritsasi** deyiladi va A^t ko'rinishda belgilanadi.

Matritsalar ko'paytmasi transponirlanganda $(AB)^t = B^t A^t$ tenglik o'rinli.

Satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo'lgan matritsaga n – tartibli **kvadratik matritsa** deyiladi. Kvadratik matritsaning quyidagi xususiy ko'rinishlari bir-biridan farqlaniladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{– yuqori uchburchakli matritsa;}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{– quyi uchburchakli matritsa;}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{– diagonal matritsa;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E \text{ - birlik matritsa.}$$

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Satr matritsa, ustun matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
3. Nol matritsa debchi?
4. Qanday matritsalar o'zaro teng matritsalar deyiladi?
5. Aynan bir xil o'lchamli matritsalar qanday qo'shiladi?
6. Sonni matritsaga ko'paytirish amali qanday bajariladi?
7. Matritsalar qo'shish va matritsani songa ko'paytirish amallari bo'ysunadigan xossalarni sanab o'ting?
8. Matritsa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
9. O'zaro zanjirlangan matritsalar qanday ko'paytiriladi?
10. Matritsalar qo'paytirish amali qanday xossalarga bo'ysunadi?
11. Matritsalar qo'paytirish amali o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunadimi?
12. n-tartibli kvadratik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
13. Kvadrat matritsaning qanday xususiy ko'rinishlarini bilasiz?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. Matritsa.
2. Nol matritsa.
3. Kvadrat matritsa.
4. Yuqori yoki quyi uchburchakli matritsa.
5. Diagonal matritsa.
6. Birlik matritsa.
7. Trapetsiyasimon matritsa.
8. Transponirlangan matritsa.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

1. Matritsalar ustida amallarni bajaring:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b)} -3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^2$$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}^2 \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (9-29 betlar)
- [4] (4-7 betlar)
- [6] (3-12 betlar)
- [7] (3-23 betlar)
- [13] (70-86 betlar)

2- MA'RUZA. DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI

Reja:

1. 2-tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari.
2. Uchinchi tartibli determinantlar.
3. n - tartibli determinantlar.

1. Haqiqiy a, b, c va d sonlar berilgan bo'lsin. Ular **2- tartibli determinant** yoki **aniqlovchi** deb ataluvchi

$ad - bc$ sonni aniqlaydi va
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
 ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifga asosan ,
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

Haqiqiy a, b, c va d sonlarga determinant elementlari deyiladi. Ikkinchi tartibli determinantda a, b - birinchi , c, d - ikkinchi satr, a, c – birinchi, b, d -ikkinchi ustun, a, d - bosh yoki birlamchi, b, c - ikkilamchi diagonallar bir-biridan farqlaniladi.

2 - tartibli determinant misolida determinantlarning quyidagi asosiy xossalarini tekshirib ko'rish qiyin emas.

Determinantning kattaligi:

- 1- xossa: satrlari mos ustunlari bilan almashtirilsa - o'zgarmaydi;
- 2- xossa: satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilsa - ishorasi qarama - qarshisiga o'zgaradi;
- 3- xossa: biror- bir satr (ustun) har bir elementi κ haqiqiy songa ku'paytirilsa - κ marta ortadi;
- 4- xossa: biror- bir satr (ustun) har bir elementi nolga teng bo'lsa - nolga teng;
- 5- xossa: ikki satr (ustun) mos elementlari o'zaro teng yoki proporsional bo'lsa- nolga teng.

Quyida ta'riflanadigan 3- tartibli, ixtiyoriy n - tartibli determinantlar uchun ham yuqoridagi xossalar o'rinli.

2. Uchinchi tartibli determinant yoki aniqlovchi deb,

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1)$$

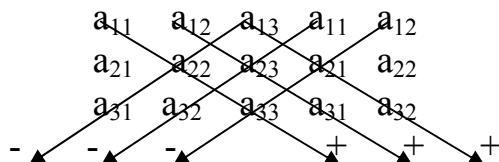
yig'indiga teng songa aytiladi va

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

ko'rinishda yoziladi.

Haqiqiy a_{ik} ($i, k = \{1, 2, 3\}$) sonlarga determinantning elementlari deyiladi. a_{ik} element i -satr va k -ustun elementi bo'lib, ularning kesishmasida joylashgan. 3- tartibli determinantda ham satr va ustunlar, bosh va ikkilamchi diagonalalar bir-biridan farqlaniladi.

(1) standart ifoda sodda tuzilishga ega. a_{ik} elementlar bo'yicha hisoblanadigan Δ yig'indini **Sarryus** qoidasi yordamida tuzish mumkin. Determinant ustunlariga o'ngdan birinchi va ikkinchi ustunlarini ko'chirib yozib, kengaytirilgan jadval tuzamiz:



Bosh diagonal yo'nalishida joylashgan elementlar ko'paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo'nalishidagi elementlar ko'paytirilib manfiy ishora bilan olinsa, (1) yig'indi hosil bo'ladi.

Δ yig'indi uchburchaklar usulida ham tuzilishi mumkin:

$$\Delta = + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Oldidagi ishorasi bilan birga har bir ko'paytma determinantning hadi deyiladi. Har bir ko'paytma determinantning har bir satri va ustuni element - vakillaridan tarkib topgan. (1) ifodaning standart deyilishiga sabab, uning har bir hadida ko'paytuvchi elementlar birinchi indeks- satr nomerining o'sish tartibida joylashtirilgan. Ikkinchi indeks ustun nomerlari esa quyidagi tartibda joylashgan:

$$\left. \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right\} (2) \quad \left. \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \right\} (3)$$

(1.2) va (1.3) tizimlar 1, 2 va 3 sonlari ustida o'rin almashtirishlardir.

(1, 2, 3) tartiblangan o'rin almashtirish tizimiga asosiy o'rin almashtirish deyiladi.

Agar o'rin almashtirishda uning ikki aniq elementlari o'rinlari almashtirilsa, ushbu elementlar transpozitsiyalangan deyiladi. Transpozitsiyalanganda o'rin almashtirish tizimi boshqasi bilan almashinadi. Masalan,

$$(1, 2, 3) \rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (2, 3, 1) \text{ va hokazo.}$$

Agar biror-bir o'rin almashtirish tizimi asosiysidan bir necha N_1, N_2 , va hokazo transpozitsiyalash usullari bilan hosil qilingan bo'lsa, ushbu sonlar ayni vaqtda yoki juft yoki toq sonlar ekanligini ta'kidlash muhimdir. O'rin

almashtirish tizimi asosiysidan juft (toq) sondagi transpozitsiyalar yordamida olingan bo'lsa, mos ravishda juft (toq) deyiladi.

$J = (j_1, j_2, j_3)$ o'rin almashtirish tizimi berilgan bo'lsin. Bu yerda, j_1, j_2, j_3 - 1, 2 va 3 sonlarining tanlangan biror-bir tartibi. $t(j)$ - asosiy (1, 2, 3) o'rin almashtirishdan j o'rin almashtirishga o'tish uchun zarur transpozitsiyalar soni bo'lsin. Agar $t(j)$ – juft (toq) son bo'lsa, j - juft (toq) o'rin almashtirishdir.

(2) o'rin almashtirishlar tizimi juft, (3) o'rin almashtirishlar tizimi esa toqdir.

Yuqorida keltirilgan tushunchalardan foydalanib, uchinchi tartibli determinantni boshqa teng kuchli ta'rifini berish mumkin.

3-tartibli determinant yoki aniqlovchi deb, quyidagi yig'indiga teng Δ songa aytiladi

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

bu yerda, $j (j_1, j_2, j_3)$ - asosiy (1, 2, 3) o'rin almashtirishdan hosil bo'lishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar.

Ushbu ta'rif, n - tartibli determinantni ta'riflashda umumlashtirilishi mumkin.

3. n – tartibli determinant yoki **aniqlovchi** deb, quyidagi yig'indiga teng Δ songa aytiladi

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad \text{va}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda, $j (j_1, j_2, \dots, j_n)$ -asosiy (1, 2, ..., n) o'rin almashtirishdan olinishi mumkin bo'lgan ixtiyoriy o'rin almashtirish, $t(j)$ – asosiydan j o'rin almashtirishga o'tishda transpozitsiyalar soni.

$(-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ ko'paytmaga determinantning hadi deyiladi. n – tartibli determinant n^2 xaqiqiy son – elementlar orqali aniqlanadi va yig'indi $n!$ ta haddan iborat.

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Determinantning kattaligi uning satrlari mos ustunlari bilan almashtirilsa qanday o'zgaradi?
3. Determinantning satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilsachi?
4. Determinant biror-bir satri (ustuni) elementlari umumiy ko'paytuvchisini uning ishorasidan tashqariga ko'paytuvchi sifatida chiqarish mumkinmi?
5. Qanday hollarda determinantning kattaligi nolga teng?
6. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
7. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash Sarryus qoidasi nimadan iborat?
8. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash uchburchak sxemasini yozing.
9. Transpozitsiyalash deganda nimani tushunasiz?
10. Juft yoki toq o'rin almashtirish tizimi deb, qanday o'rin almashtirishga aytiladi?
11. n- tartibli determinant deb nimaga aytiladi?

Mavzuning tayanch iboralari

1. Ikkinchi tartibli determinant.
2. Determinant elementi.
3. Determinant satri.
4. Determinant ustuni.
5. Determinant bosh va ikkilamchi diagonal.
6. Uchinchi tartibli determinant.
7. Determinant hadi.
8. O'rin almashtirishda transpozitsiyalash.
9. Asosiy o'rin almashtirish.
10. Juft yoki toq o'rin almashtirish.
11. n- tartibli determinant.

Mustaqil ishlash uchun misollar

2.1. Quyida berilgan aniqlovchilarni hisoblang:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{b)} & \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{c)} & \begin{vmatrix} 1,5 & 8 \\ 1,25 & 14/3 \end{vmatrix} \quad \text{d)} & \begin{vmatrix} \sqrt[4]{2} & 5 \\ -0,9 & \sqrt[4]{8} \end{vmatrix} \quad \text{e)} & \begin{vmatrix} \sqrt{5}-2 & 3 \\ 3 & 2+\sqrt{5} \end{vmatrix} \\ \text{f)} & \begin{vmatrix} \cos \pi/4 & -9,6 \\ \sqrt[3]{27/8} & \sin \pi/4 \end{vmatrix} \quad \text{g)} & \begin{vmatrix} \sin 41^\circ & \sin 49^\circ \\ -\cos 41^\circ & \cos 49^\circ \end{vmatrix} \quad \text{h)} & \begin{vmatrix} a^2-b^2 & a^3-b^3 \\ (a^2-b^2)^{-1} & (a-b)^{-1} \end{vmatrix} \\ \text{i)} & \begin{vmatrix} \sqrt[3]{25} \sqrt[3]{b}^2 -4 & \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{5} & 1/(\sqrt[3]{5b}+2) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{j)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{k)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{l)} \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{m)} \begin{vmatrix} \sin \pi/3 & 3 & \lg 0,1 \\ 0,5 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{n)} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{o)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{p)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{q)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{s)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & x & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2. Tenglamalarni eching:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \quad 1/ \begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = -1/6$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + x = 0 \quad \text{d)} \begin{vmatrix} |x| & x^3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{e)} (0,6)^x (25/9)^{\frac{x}{4}} = (27/125)^3 \quad \text{f)} 2^x \begin{vmatrix} 4^x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 = 0$$

$$\text{g)} \log_4(2/ \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}) = \log_4 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{h)} \begin{vmatrix} 2 & \lg x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\sqrt{\lg x}$$

$$\text{i)} |x| \begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{j)} (0,6)^{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix}} + (0,8)^{\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1$$

$$\text{k)} \begin{vmatrix} \sin x & 0 & -5/2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0,5 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 1 \quad \text{l)} \cos^2(\pi x/4) + \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & x & 2 \\ 6 & -5 & x \end{vmatrix}} = 0$$

2.3. Tengsizliklarni eching:

$$\text{a)} 5/ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} \leq 0 \quad \text{b)} 1/ \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} < 1/3$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} x & 4 \\ |x| & x \end{vmatrix} + 3 > 0 \quad \text{d)} \sqrt{x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & x \end{vmatrix}} > -2 \quad \text{e)} \sqrt{\begin{vmatrix} x & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x} > 2$$

$$\text{f)} \sqrt{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} < 2 \quad \text{g)} \sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}} < \sqrt{x} \quad \text{h)} \sqrt{\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & x \end{vmatrix}} < x \quad \text{i)} \sqrt{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} x} > \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{j)} \log_{0,5} \left(\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ x & 1 \end{vmatrix} \right) - x^2 > -3 \quad \text{k)} \log_x \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & 7 \end{vmatrix} > 1$$

$$1) \begin{vmatrix} 3^x & 2 & -1 \\ 9^x & 2^x & 0 \\ 2^x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

2.4. Quyidagi o'rin almashtirish tizimlarining juft yoki toqligini aniqlang:

- a)** (2; 1; 3), **b)** (3; 1; 2), **v)** (1; 3; 2; 4),
g) (2; 3; 1; 4), **d)** (3; 4; 1; 5; 2), **e)** (2; 5; 3; 4; 1),
yo) (2; 5; 3; 1; 4; 6), **j)** (6; 5; 3; 1; 4; 2).

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (9-29 betlar)
 [4] (4-7 betlar)
 [6] (3-12 betlar)
 [7] (3-23 betlar)
 [13] (70-86 betlar)

3- MA'RUZA. DETERMINANTLARNING XOSSALARI

Reja:

1. Minor va algebraik to'ldiruvchilar haqida tushuncha.

2. Determinantlarning xossalari.

1. n - tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinant berilgan bo'lib, uning ixtiyoriy i - satrini va ixtiyoriy κ - ustunini o'chiramiz. Qolgan ifoda $(n-1)$ – tartibli determinantni tashkil etadi va a_{ik} elementning **minori** deyiladi. a_{ik} element minori M_{ik} yozuv bilan belgilanadi.

a_{ik} elementning **algebraik to'ldiruvchisi** yoki **ad'yunkti** deb, $A_{ik} = (-1)^{i+\kappa} M_{ik}$ kattalikka aytiladi.

Masalan, uchinchi tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinantning a_{12} elementi minori M_{12} va algebraik to'ldiruvchisi A_{12} mos ravishda :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$$

2. Ixtiyoriy n - tartibli determinant o'zining asosiy xossalari (1- mavzuga qaralsin) tashqari, qo'shimcha ravishda quyidagi xossalarga ham ega.

6- xossa: Determinantning ixtiyoriy satri yoki ustuni elementlarining o'z algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi uning kattaligiga teng:

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} A_{i\kappa} \quad (i = \{1, 2, \dots, n\}) \quad (1), \quad \Delta = \sum_{i=1}^n a_{i\kappa} A_{i\kappa} \quad (\kappa = \{1, 2, \dots, n\}). \quad (2)$$

(1) yig'indi n - tartibli determinantni i - satr elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyilsa, (2) yig'indi κ – ustun elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyiladi.

Masala: Uchinchi tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoying.

Uchinchi tartibli determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyish formulasini qo'llaymiz, natijada

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_{i2} A_{i2} &= a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} = \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &+ a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = \Delta. \end{aligned}$$

7-xossa: Determinant biror satri (yoki ustuni) elementlarining boshqa parallel satr (yoki ustun) mos elementlari algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Ushbu xossa determinantlarning 5- xossasi asosida isbotlanadi.

8- xossa: n- tartibli aniq bir satrlari (ustunlari) bir-biridan farq qiluvchi, qolganlari esa aynan teng bo'lgan Δ_1 va Δ_2 determinantlar berilgan bo'lsin. Berilgan Δ_1 va Δ_2 determinantlarning yig'indisi ko'rsatilgan farqli satri (ustuni) mos elementlarining yig'indisidan iborat, umumiy satrlari (ustunlari) esa o'zgarmas qoladigan n- tartibli Δ determinantga teng. Masalan, uchinchi ustunlari farqli, qolgan ustunlari aynan bir xil uchinchi tartibli determinantlar quyidagicha qo'shiladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}.$$

9- xossa: Determinant kattaligi uning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa parallel satr (ustun) mos elementlarini bir xil songa ko'paytirib qo'shganda o'zgarmaydi.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashning ratsional usuli uning biror satri yoki ustunida keltirilgan xossa asosida nollar yig'ib, so'ngra shu satr yoki ustun bo'yicha yoyib hisoblashdir. Yuqori tartibli determinantni hisoblash masalasi ketma-ket ravishda quyi tartibli determinantlarni hisoblash bilan almashinadi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} -15 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9(-17) = -153.$$

10- xossa: n- tartibli berilgan $\Delta_1 = |a_{ik}|$ va $\Delta_2 = |b_{ik}|$ determinantlar ko'paytmasi n- tartibli $\Delta = |c_{ik}|$ determinantga teng va uning ixtiyoriy c_{ik} elementi quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

c_{ik} element Δ_1 determinant i - satri elementlarining Δ_2 determinant k - ustuni mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

O'z- o'zini tekshirish uchun savollar:

1. n - tartibli determinant ixtiyoriy elementi minori deb nimaga aytiladi?
2. Algebraik to'ldiruvchi yoki ad'yunkt deb nimaga aytiladi?
3. n - tartibli determinantni i - satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblash formulasini yozing.
4. n - tartibli determinantni k - ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash formulasini yozing.
5. Determinantni transponirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishlar bajarganda kattaligi o'zgarmaydi?
6. Yukori tartibli determinantlarni nollar yigib hisoblash usuli nimadan iborat?
7. Determinantlarni qo'shish mumkinmi va qanday?
8. Tartiblari teng determinantlarni ko'paytirish qoidasi nimadan iborat?

Mavzuning tayanch iboralari

1. Determinant elementi minori.
2. Element algebraik to'ldiruvchisi yoki ad'yunkti.
3. Determinantni satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish.
4. Determinantlarni qo'shish.
5. Determinantlarni ko'paytirish.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

3.1. Berilgan $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ aniqlovchi barcha elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini toping va $\Delta = \sum_{k=1}^3 a_{3k} A_{3k}$ ekanligini tekshirib ko'ring.

3.2. Quyidagilarni eng ma'qul usulda hisoblang:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 81 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -80 & 2 \\ -1 & -9 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{e)} \quad 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & -74 \\ 4 & 0 & 9 \\ -1 & 1,5 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 & 75 \\ 4 & 0 & -9 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 101 & -99 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -101 & 98 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{g)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 14 & -13 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0, (3) & 0 \\ 2 & -14 & 13 \end{vmatrix}$$

3.3. Aniqlovchilarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib, berilgan

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ ,1 & ,5 \end{vmatrix} \quad \text{va} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ ,2 & ,1 \end{vmatrix} \quad \text{aniqlovchilarni bir-biriga mumkin bo'lgan barcha usullarda ko'paytiring, } \Delta_1 \Delta_2 = 52 \text{ ekanligini tekshirib ko'ring.}$$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (9-29 betlar)
- [4] (4-7 betlar)
- [6] (3-12 betlar)
- [7] (3-23 betlar)
- [13] (70-86 betlar)

4- MA'RUZA. TESKARI MATRITSA VA UNI QURISH

Reja:

1. Kvadratik matritsa determinanti. Matritsa normasi.
2. Matritsaning rangi va uni aniqlash usullari.
3. Teskari matritsa haqida tushuncha.
4. Teskari matritsa qurish algoritmlari.

Matritsalar o'zlarining quyidagi sonli xarakteristikalarini bo'yicha taqqoslaniladi:

- 1) kvadratik matritsa determinanti;
- 2) normasi;
- 3) rangi.

1. Berilgan n - tartibli $A = (a_{ik})$ kvadratik matritsaning determinanti yoki **aniqlovchisi** deb, n - tartibli $|a_{ik}|$ determinantga aytiladi va $\det(A)$ ko'rinishda yoziladi.

Kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi uning asosiy sonli xarakteristikasi hisoblanadi. Yuqori, quyi uchburchakli va diagonal matritsalarining determinanti bosh diagonal elementlarining ko'paytmasiga teng bo'lsa, birlik matritsaning determinanti esa birga teng.

Ikki teng o'lchovli kvadrat matritsalar ko'paytmasining determinanti alohida matritsalar determinantlari ko'paytmasiga teng: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Berilgan $n \times m$ o'lchamli $A = (a_{ik})$ **matritsaning normasi** deb, unga mos qo'yiluvchi quyidagi nomanfiy

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik}^2} \quad \text{songa aytiladi.}$$

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -9 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning normasi

$$N = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2 + (-9)^2 + 8^2 + 1^2} = 14.$$

2. $n \times m$ o'lchamli $A = (a_{ik})$ matritsa berilgan bo'lib, p matritsaning satrlari soni n va ustunlari soni m larning kichigidan katta bo'lmagan son bo'lsin. Matritsaning ixtiyoriy p ta satrini va ixtiyoriy p ta ustunini o'chiramiz. Uchirilgan elementlar p - tartibli kvadratik matritsani tashkil etadi va unga o'z navbatida p -tartibli determinant yoki minorni mos qo'yish mumkin.

A **matritsaning rangi** deb, noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $\text{rang}(A)$ ko'rinishida ifodalanadi.

1-masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang

Berilgan matritsa 3×2 o'lchamli bo'lgani uchun satrlari va ustunlari sonini taqqoslaymiz va kichigi 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning kattaligini hisoblaymiz. Jarayonni noldan farqli 2- tartibli minor ajralmaguncha davom etamiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta'rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng.

2-masala. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

B matritsadan ajralishi mumkin bo'lgan eng yuqori - ikkinchi tartibli har qanday minor nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, matritsa rangi ikkiga teng bo'la olmaydi. B matritsa nolmas matritsa bo'lgani uchun uning rangi 1 ga teng.

3-masala. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

C matritsa uchinchi tartibli kvadratik matritsa. Undan yagona eng yuqori 3-tartibli M_1 minor ajraladi. M_1 minor kattaligini hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0. \quad M_1 = 0 \text{ bo'lgani uchun } C \text{ matritsa rangi}$$

3 ga teng bo'la olmaydi. $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ bo'lgani uchun $\text{rang}(C) = 2$.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi **elementar almashtirishlar** bajarganda o'zgarmaydi:

1. Matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini bir xil noldan farqli songa ko'paytirganda;
2. Matritsa satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilganda;
3. Matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini bir xil songa ko'paytirib, so'ngra qo'shganda;
4. Matritsa transponirlanganda.

Matritsa rangini aniqlashning ta'rif asosida biz yuqorida masalalarda ko'rgan «**minorlar ajratib hisoblash**» usuli va nollar yig'ib hisoblashga asoslangan «**Gauss algoritmi**» usullari mavjud.

Matritsa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig'ish usuli asosida quyidagicha aniqlanadi:

Dastlabki ko'rinishdagi matritsa yuqorida sanab o'tilgan elementar almashtirishlar yordamida «**trapetsiyasimon matritsa**» ko'rinishiga keltiriladi. Trapetsiyasimon matritsa deb, bosh diagonaldan yuqorida yoki quyida joylashgan har bir elementi nolga teng bo'lgan matritsaga aytiladi. Trapetsiyasimon matritsaning rangi yoki huddi shuning o'zi dastlabki matritsaning rangi trapetsiyasimon matritsaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini nollar yig'ish

usulida aniqlang?

Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz va uning ko'rinishini trapetsiyasimon ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trapetsiyasimon matritsa bosh diagonal elementlaridan ikkitasi noldan farqli bo'lgani uchun uning rangi va shu bilan birga berilgan matritsa rangi ikkiga teng.

3. n – tartibli kvadratik $A = (a_{ik})$ matritsa berilgan bo'lsin.

Agar A matritsa determinanti noldan farq qilib, uning rangi tartibi n ga teng bo'lsa, matritsaga maxsusmas matritsa deyiladi. Agarda $\det(A) = 0$ bo'lib, rangi n dan kichik bo'lsa, A matritsaga maxsus matritsa deyiladi.

Teorema. Ikki teng tartibli kvadrat matritsalarining ko'paytmasi, ko'paytuvchi matritsalarining har biri maxsusmas bo'lgandagina, maxsusmas matritsadan iborat bo'ladi.

To'g'ridan-to'g'ri ko'paytirish yo'li bilan n-tartibli birlik E va n-tartibli har qanday A matritsalarining o'zaro o'rin almashinuvchi ekanligini, ko'paytma A matritsani berishini, ya'ni $AE = EA = A$ tengliklar o'rinli bo'lishini misollarda tekshirib ko'rish qiyin emas.

Berilgan A kvadratik matritsaning teskari matritsasi deb, tartibi A matritsaning tartibiga teng va A matritsaga chapdan yoki o'ngdan ko'paytmasi birlik E matritsaga teng bo'lgan A^{-1} matritsaga aytiladi:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan E birlik matritsaning maxsusmas ekanligini e'tiborga olsak, maxsus matritsaning teskari matritsaga ega emasligini xulosa

qilamiz. Har qanday maxsusmas kvadrat matritsaning yagona teskari matritsasi mavjudligi quyidagi teoremdan kelib chiqadi.

Teorema. Teskari matritsa mavjud bo'lishi uchun $\det(A) \neq 0$ bo'lib, A matritsaning maxsusmas bo'lishi zarur va etarli.

4. Berilgan maxsusmas kvadrat matritsaning teskari matritsasini qurishning « klassik » va Jordan usullari mavjud.

Berilgan $A = (a_{ik})$ kvadratik matritsa har bir elementini o'zining ad'yunkti bilan almashtirib, so'ngra hosil bo'lgan matritsani transponirlasak, quyidagi A matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi A^v ni hosil qilamiz:

$$A^v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A^v matritsaga A matritsaning qo'shma matritsasi deyiladi.

n- tartibli determinantning 6 va 7 xossalariga asosan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Tenglikni ixcham shaklda $A A^v = \det A \cdot E$ ko'rinishda yozish mumkin. Tenglamani ikkala tomonini noldan farqli $\det A$ ga bo'lsak,

$$A \left(1 / \det A \right) A^v = E.$$

Ikkinchi tomondan teskari matritsa ta'rifiga binoan $A A^{-1} = E$

Tenglamalarni solishtirib, A kvadratik maxsusmas matritsaning teskari matritsasi A^{-1} uchun quyidagi formulani olamiz:

$$A^{-1} = (1 / \det A) A^v$$

Oxirgi formula A maxsusmas matritsaning teskarisini qurish klassik usul formulasi deyiladi. Umuman olganda, klassik usulda teskari matritsa qurish jarayoni quyidagi ketma-ket bajariladigan qadamlarni o'z ichiga oladi:

1. Berilgan A kvadrat matritsa determinanti kattaligi hisoblanadi. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, keyingi qadamga o'tiladi. Agarda $\det A = 0$ bo'lsa, A matritsa maxsus va teskari matritsa mavjud emas;
2. $A = (a_{ik})$ matritsa elementlarining mos ad'yunktlari hisoblanadi va tartib saqlangan holda, matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasi (A_{ik}) tuziladi;

3. $(A_{i \kappa})$ matritsa transponirlanadi va A matritsa elementlari mos ad'yunklari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki shuning o'zi qo'shma $A^v = (A_{\kappa i})$ matritsasi tuziladi;
4. $A^v = (A_{\kappa i})$ matritsa har bir elementi $\det A$ ga bo'linadi va A^{-1} teskari matritsa quriladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maxsusmas matritsaning teskari matritsasini klassik usulda quring.

Klassik usulda ikkinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = 1 / \det A \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

formula asosida quriladi. Formulani qo'llab,

$$A^{-1} = 1 / 10 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

natijani olamiz. Teskari matritsa to'g'ri qurilganini ta'rif asosida tekshirib ko'ramiz:

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Demak, berilgan A matritsaning teskarisi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Berilgan A kvadratik matritsa teskarisi A^{-1} Jordan usuli asosida quyidagicha quriladi: A matritsaga o'ngdan tartibi A ning tartibiga teng birlik E matritsa qo'shiladi va kengaytirilgan $(A | E)$ matritsa tuziladi. Parallel ravishda kengaytirilgan matritsaning chap va o'ng qismlari satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarilib, chap qism birlik matritsa ko'rinishiga keltiriladi. Kengaytirilgan matritsaning chap qismi birlik E matritsa ko'rinishiga keltirilganda uning o'ng qismida teskari A^{-1} matritsa hosil bo'ladi. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi quyidagicha sxematik shaklda ifodalanishi mumkin: $(A | E) \sim (E | A^{-1})$.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini Jordan usuli yordamida quramiz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3/4 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/16 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3/4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/16 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 5/4 & -9/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -5/4 & 13/16 \end{array} \right).$$

Oxirgi ko'rinishdagi kengaytirilgan matritsa o'ng qismida teskari matritsa shakli hosil bo'ldi. Teskari matritsa to'g'ri qurilganini ta'rif asosida tekshirib ko'rish mumkin.

Teskari matritsa o'zining quyidagi xossalariga ega:

$$1) (A^{-1})^{-1} = A; \quad 2) (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t; \quad 3) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

O'z- o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsalar taqqoslanishi mumkin bo'lgan qanday sonli xarakteristikalarini bilasiz?
2. n-tartibli kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi deb nimaga aytiladi?
3. Matritsaning normasi debchi?
4. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?
5. Matritsa rangini hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
6. Matritsa ustida qanday amallarni bajarganda uning rangi o'zgarmaydi?
7. Matritsa rangini nollar yig'ib aniqlash usuli nimadan iborat?
8. Maxsusmas matritsa deb qanday kvadratik matritsaga aytiladi?
9. Maxsus matritsa debchi?
10. Teng tartibli qanday kvadratik matritsalarini ko'paytirganda ko'paytma maxsusmas matritsadan iborat bo'ladi?
11. Maxsusmas matritsaning teskari matritsasi deb qanday matritsaga aytiladi?
12. Nima uchun maxsus matritsaning teskarisi mavjud emas?
13. Kvadratik matritsaning teskari matritsasini qurishning qanday usullarini bilasiz?
14. Teskari matritsa qurishning klassik usuli qanday jarayonlardan iborat? Formulasini yozing?
15. Uchinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisini klassik usulda qurish kengaytirilgan formulasini yozing?
16. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi nimalardan iborat?
17. Teskari matritsaning qanday xossalarini bilasiz?

Mavzuning tayanch iboralari

1. Kvadratik matritsa determinanti yoki aniqlovchisi.
2. Matritsa normasi.
3. Matritsa osti minori.
4. Matritsa rangi.
5. Gauss algoritmi.
6. Maxsusmas kvadratik matritsa.
7. Maxsus kvadratik matritsa.
8. Teskari matritsa.
9. Matritsa elementlari mos ad'yunklari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki qo'shma matritsa.
10. Teskari matritsa qurish klassik usuli jarayonlari.
11. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi.

Mustaqil ishlash uchun misollar:

4.1. Quyida berilgan matritsalarining ranglarini «minorlar ajratish» usulida aniqlang:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{h)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2. Quyidagi matritsalarining ranglarini «Gauss algoritmi» usuli yordamida toping:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3. x va y larning qanday qiymatlarida quyidagi
$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

matritsa rangi 2 ga teng bo'ladi?

4.4. Quyidagi matritsalaridan maxsuslarini ajrating:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & -\operatorname{tg} x \\ -\operatorname{ctgx} & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4.5. Quyida berilgan matritsalarining teskari matritsalarini «klassik usul»da toping:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

4.6. Quyidagi matritsalarining teskari matritsalarini «Jordan usuli»da aniqlang:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (9-29 betlar)
- [4] (4-7 betlar)
- [6] (3-12 betlar)
- [7] (3-23 betlar)
- [13] (70-86 betlar)

5- MA'RUZA. CHIZIOLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida tushuncha. Sistemaning yechimi.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligi va yagonaligi haqida teoremlar.
3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas yechimlari mavjudlik shartlari.

1. Iqtisodiy masalalarning aksariyati bir necha noma'lumli (aytaylik m ta) chekli sondagi (aytaylik n ta) chiziqli tenglamalarni o'z ichiga olgan va ushbu tenglamalarning umumiy yechimini topish masalasi qo'yilgan quyidagi

[illegible]

chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu yerda, a_{ik} – haqiqiy sonlar bo'lib, sistemaning koeffitsiyentlari; b_i - haqiqiy sonlar esa uning ozod hadlari deyiladi. Sistemaning (1) ko'rinishdagi shakliga m ta noma'lumli n ta **chiziqli tenglamalar normal sistemasi** deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ - koeffitsiyentlar yoki asosiy,}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1m} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2m} & \mathbf{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nm} & \mathbf{b}_n \end{array} \right) \quad - \text{matritsaga esa}$$

kengaytirilgan matritsa deyiladi.

(1) **sistemaning yechimi yoki yechimlari to'plami** deb, uning har bir tenglamasini sonli ayniyatga aylantiradigan mumkin bo'lgan barcha m ta haqiqiy sonlarning tartiblangan $(x_1; x_2; \dots; x_m)$ tizimlari to'plamiga aytiladi.

Sistemani yechish deganda – uning barcha yechimlarini topish yoki yechimga ega emasligini ko'rsatish tushuniladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa- **birgalikda**, yagona yechimga ega bo'lsa- **aniq**, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa- **aniqmas** va umuman yechimi mavjud bo'lmasa – **birgalikda bo'lmagan** sistema deyiladi.

Tenglamalar sistemasining biror-bir tenglamasi zid (qarama- qarshi) tenglama bo'lsa, sistemaning o'zi ham zid,ya'ni birgalikda bo'lmagan

$$1) \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \text{ bo'lgani uchun- sistema aniq.}$$

Yagona yechim Kramer formulalari yordamida topiladi:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} / 27 = -81 / 27 = -3,$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} / 27 = 54 / 27 = 2,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} / 27 = 27 / 27 = 1. \text{ Sistema yechimi: } (-3; 2; 1).$$

$$2) \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Kramer teoremasiga ko'ra, sistema}$$

yoki aniqmas yoki birgalikdamos. Kroneker-Kapelli teoremasiga murojaat etib, sistema kengaytirilgan matritsasi rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & 7/2 & -5/2 & 9/2 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|.$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A | B) < 3$ (noma'lumlar soni) shartlar bajarilgani uchun sistema aniqmas va quyidagi sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_3 + 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3x_3 - 5 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani Kramer formulasi yordamida yechish mumkin:

$$x_1 = \begin{vmatrix} x_3 + 7 & 1 \\ 3x_3 - 5 & 5 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(x_3 + 20) / 7,$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} -2 & x_3 + 7 \\ 4 & 3x_3 - 5 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (5x_3 + 9) / 7.$$

Sistema yechimi: $(-(x_3 + 20)/7; (5x_3 + 9)/7; x_3)$.

3) $\det A = 0$ bo'lgani uchun, sistema yoki aniqmas yoki birgalikdamos. Sistema kengaytirilgan matritsasi rangini nollar yig'ib, hisoblaymiz:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 10 \\ 0 & 7/2 & -5/2 & 9/2 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array} \right|$$

$\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A | B)$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun sistema birgalikdamos.

3. Agar (1) sistema tenglamalari barcha ozod hadlari nolga teng bo'lsa, chiziqli tenglamalar sistemasi **bir jinsli sistema** deyiladi.

Agarda, tenglamalar ozod hadlaridan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema **bir jinsli bo'lmagan sistema** deb ataladi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo birgalikda, chunki

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A | \theta)$$

tenglik har doim o'rinli. Bundan tashqari, bir jinsli sistema har doim m ta nollar tizimi – **nolli** $(0; 0; \dots; 0)$ yechimga egaligi bilan xarakterlanadi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi uchun uning nolmas yechimlarga egalik shartini bilish muhimdir. Javob Kroneker – Kapelli teoremasidan kelib chiqadi.

Teorema. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol yechimdan tashqari, nolmas yechimlarga ham ega bo'lishi uchun, sistema asosiy matritsasi rangining noma'lumlar sonidan kichik bo'lishi zarur va yetarli.

Teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-Xulosa. Agar bir jinsli sistemaning noma'lumlari soni uning tenglamalari sonidan katta bo'lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega;

2-Xulosa. n ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol yechimdan tashqari, nolmas yechimlarga ham ega bo'lishi uchun, sistema asosiy matritsasining determinanti nolga teng bo'lishi zarur va etarli.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Sistemaning yechimi debchi?
3. Qanday sistemalarga birgalikda, aniq, aniqmas va birgalikda bo'lmagan sistemalar deyiladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudlik va yagonalik yetarli shartlari nimalardan iborat?
5. n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer teoremasi nimani aniqlab beradi?

6. Aniqmas chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechish mumkinmi?
7. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
8. Nima uchun chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo birgalikda va ajralib turuvchi xususiyati nimadan iborat?
9. Bir jinsli sistemaning nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham egalik yetarli shartlaridan qaysilarini bilasiz?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Sistema yechimi.
3. Birgalikdagi sistema.
4. Aniq sistema.
5. Aniqmas sistema.
6. Birgalikda bo'lmagan sistema.
7. Sistemaning asosiy matritsasi.
8. Sistemaning kengaytirilgan matritsasi.
9. Kramer formulalari.
10. Bir jinsli sistema.
11. Bir jinsli bo'lmagan sistema.
12. Bir jinsli sistemaning nolmas yechimlari.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarining birgalikdaligi va aniqligini tekshiring, birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida va grafik usulda yeching:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + y = 9 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 7x + 2y = -8 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -6x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = -12 \\ 4x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -9 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 = -1 \\ 2x_1 + 8x_2 = -2 \end{cases} \end{array}$$

Quyida berilgan sistemalar a parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega emas (birgalikda emas):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + ay = 3 \\ x - 2ay = a + 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x_1 - ax_2 = a + 2 \\ (a+1)x_1 - 6x_2 = 4 - a \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = 2 - a \end{cases} \end{array}$$

Quyida berilgan sistemalar a parametrning qanday qiymatlarida cheksiz ko'p yechimga ega (aniqmas):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + ay = -3 \\ (a-5)x - 3ay = 4a+1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = 2-a \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} (a-1)x_1 + ax_2 = 10-2a \\ (a/2)x_1 + x_2 = a-3 \end{cases} \end{array}$$

Quyidagi sistemalarning birgalikdaligi va aniqligini tekshiring, birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida yeching:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + y - 6z = -3 \\ x - 4y + z = -2 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_3 = -4 \\ 6x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{e)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{g)} \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 8x_1 + 7x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{h)} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = -1 \\ 7x_1 + 4x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (38-50 betlar)
- [4] (14-19 betlar)
- [6] (26-41 betlar)
- [7] (25-36 betlar)
- [13] (88-103 betlar)

6- MA'RUZA. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH USULLARI

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish.
2. Sistemaning umumiy yechimi. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi.

1. n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

[illegible]

berilgan bo'lsin. Matritsalarini ko'paytirish amali va matritsalar tengligi ta'rifidan foydalanib, sistemani

$$A X = B$$

matritsali tenglama ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda, $A = (a_{ik})$ - asosiy matritsa, B – ozod hadlar ustun matritsasi va X - noma'lumlar ustun matritsasi.

Sistemaning asosiy matritsasi A maxsusmas bo'lib, A^{-1} uning teskari matritsasi bo'lsin. $A X = B$ tenglama ikkala qismini chapdan teskari A^{-1} matritsaga ko'paytiramiz va

$$A^{-1}A = E, EX = X$$

tengliklarni e'tiborga olsak,

$$X = A^{-1}B \quad (1)$$

tenglamani olamiz. (1) tenglama **tenglamalar sistemasi yechimini matritsa shaklda yozish yoki sistemani teskari matritsa usulida yechish formulasi** deyiladi. Shunday qilib, sistemani teskari matritsa usulida yechish uchun A kvadrat matritsa teskarisi A^{-1} quriladi va u chapdan ozod hadlar matritsasi B ga ko'paytiriladi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini teskari matritsa usulida yeching:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$$

$$1) \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Sistema yechimi: $(9; -5)$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ qism matritsa rangi sistema rangiga teng bo'lgani uchun, sistema

dastlabki ko'rinishini unga teng kuchli quyidagi shakli bilan almashtiramiz:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = -2x_2 + 2 \\ 3x_1 + x_3 = -6x_2 + 5. \end{cases}$$

Yuqoridagi sistemani matritsalar usulini qo'llab, yechish mumkin:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1/13 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_2 + 2 \\ -6x_2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 + 22/13 \\ -1/13 \end{pmatrix}.$$

Sistema aniqmas bo'lib, umumiy yechim ko'rinishlaridan biri $(-2x_2 + 22/13; x_2; -1/13)$ shaklda yozilishi mumkin. Bu yerda, $x_2 \in \mathbb{R}$.

3) Sistema asosiy matritsasi teskarisini Jordan usulida aniqlaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/16 & 3/8 & 7/16 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 7/8 & 11/16 \end{array} \right)$$

Sistema yagona yechimini teskari matritsa usuli formulasini qo'llab, quramiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/16 & 3/8 & 7/16 \\ 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 7/8 & 11/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sistema yechimi: $(-2; -1; 2)$.

Har bir usul kabi teskari matritsa usuli o'zining afzallik va noqulayliklariga ega. Bir nechta asosiy matritsalar aynan teng va biri-biridan faqat ozod hadlari ustuni bilan farq qiluvchi sistemalarni teskari matritsa usulida yechgan maqsadga muvofiq. Chunki, bir marta qurilgan teskari matritsa mos ozod hadlari ustuniga ko'paytiriladi va natija olinaveradi. Usulning noqulay jihati teskari matritsa qurish jarayoni bilan bog'liq bo'lib, ayniqsa, $\det A$ nolga yaqin bo'lganda ko'p xonali sonlar ustida hisob- kitoblarni talab etadi.

2. m ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agar sistema tenglamalarining birida x_{κ} ($\kappa = \{1, 2, \dots, m\}$) noma'lum +1 koeffitsiyent bilan qatnashib, qolgan barcha tenglamalarida x_{κ} noma'lumli hadlar mavjud bo'lmasa yoki yo'qotilgan bo'lsa, sistema x_{κ} noma'lumga nisbatan ajratilgan yoki x_{κ} noma'lum sistemaning ajratilgan noma'lumi deyiladi.

Ajratilgan noma'lum bazis noma'lum deb ham yuritiladi.

Sistemaning har bir tenglamasi ajratilgan yoki bazis noma'lumga ega ko'rinishiga **noma'lumlari ajratilgan** yoki **bazisga keltirilgan sistema**

deyiladi. Har qanday birgalikdagi sistema o'zining ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lmagan noma'lumlari ajratilmagan, ozod yoki erkli noma'lumlar deb ataladi. Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & - 2x_5 = -1 \\ & - x_2 + x_3 & + 4x_5 = 7 \\ & + 5x_2 & + x_4 - 3x_5 = 6 \end{cases}$$

noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemada x_1 , x_3 va x_4 ajratilgan yoki bazis noma'lumlar bo'lsa, x_2 va x_5 noma'lumlar esa ozod yoki erkli noma'lumlardir.

Agar noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning har bir noma'lumi uning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lsa, sistema aniq, ya'ni yagona yechimga ega bo'ladi. Agarda, noma'lumlari ajratilgan sistema erkli noma'lumlarga ham ega bo'lsa, aniqmas, ya'ni cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

Berilgan dastlabki shakldagi sistemaning **umumiy yechimi** deb, unga teng kuchli bo'lgan noma'lumlari ajratilgan yoki biror-bir bazisga keltirilgan sistemaga aytiladi.

Sistemaning umumiy yechimini qurish usuliga esa **Gauss usuli** deyiladi. Sistemaning barcha yechimlarini topish uchun uning umumiy yechimini qurish yetarli. Berilgan sistemaning umumiy yechimini aniqlash uchun uning ustida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi:

- 1) sistema tenglamalari o'rinlarini almashtirish mumkin;
- 2) sistema biror-bir tenglamasi ikkala qismini bir xil noldan farqli songa ko'paytirish mumkin;
- 3) sistema biror-bir tenglamasiga uning boshqa tenglamasini songa ko'paytirib, qo'shish mumkin.

Agar sistemani almashtirish jarayonida

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = 0$$

nol yoki trivial tenglama hosil bo'lsa, u o'chiriladi. Agarda,

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m = b \quad (b \neq 0)$$

zid yoki qarama-qarshi tenglama hosil bo'lsa, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.

Sistema umumiy yechimini qurish usuli – Gauss usulining bir necha modifikatsiyalari mavjud. Quyida **Gaussning klassik** yoki ixcham sxema usuli va **Jordan modifikatsiyalari** bilan tanishamiz.

Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli to'g'ri va teskari yurishlardan iborat. To'g'ri yurishda sistemaning asosiy matritsasi trapetsiyali yoki uchburchakli ko'rinishga keltiriladi. Teskari yurishda uning noma'lumlari ketma-ket ravishda aniqlanadi va umumiy yechim quriladi.

Masala. 5-mavzuda Kramer formulalari yordamida yechilgan (1) sistemani Gaussning klassik usulida yeching:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ + 4x_2 + x_3 = 9 \\ + 7/2x_2 - 5/2x_3 = 9/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_2 + x_3 = 9 \\ 27/8x_3 = -27/8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: Dastlabki normal ko'rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A|B)$ matritsasi quriladi. Yuqorida zikr etilgan sistemani teng kuchli sistemaga aylantiruvchi elementar almashtirishlardan foydalanib, kengaytirilgan matritsaning chap qismida yoki uning qism ostida birlik matritsa hosil qilinadi. Bunda, birlik matritsadan o'ngda yechimlar ustuni hosil bo'ladi. Gauss-Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B) \sim (E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurish Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o'ng ustunda bir yo'la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko'paytmasi – yechimlar ustuni quriladi.

Masala. 5- mavzuda Kramer formulalari yordamida yechilgan sistemalarni Gauss-Jordan usulida eching.

$$\begin{aligned} 1) & \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 8 & 0 & 5 & -19 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & -13 \\ -27 & 0 & 0 & 81 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \\ 2) & \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 14 & 0 & 2 & -40 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistema aniqmas bo'lib, umumiy yechim ko'rinishlaridan biri $(x_1; -5x_1 - 13; -7x_1 - 20)$ shaklga ega.. Bu yerda, x_1 erkli noma'lum va $x_1 \in \mathbb{R}$.

$$3) \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 14 & 0 & 2 & -39 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array} \right)$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasi zid tenglama. Demak, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa shaklida yozish mumkinmi va qanday ?
2. Sistema yechimi matritsa ko'rinishida qanday yoziladi?
3. Sistemani matritsa usulida yechish yoki teskari matritsa usulining afzallik va noqulaylik jihatlari nimalardan iborat?
4. Ajratilgan noma'lum deb qanday noma'lumga aytiladi?
5. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
6. Birgalikdagi sistema nima bilan xarakterlanadi va erkli noma'lumlar deb nimaga aytiladi?
7. Sistemaning umumiy yechimi deb nimaga aytiladi?
8. Gauss usuli debchi?
9. Gauss usulining qanday modifikatsiyalarini bilasiz?
10. Sistema Gaussning klassik usulida qanday yechiladi?
11. Sistema ustida elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?
12. Sistema barcha yechimlarini topish o'rniga uning umumiy yechimini qurish yetarliymi?
13. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyatini so'zlab berib va sxemasini yozing?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. Matritsali tenglama.
2. Sistema yechimining matritsa ko'rinishi.
3. Teskari matritsa usuli.
4. Ajratilgan yoki bazis noma'lum.
5. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistema.
6. Noma'lumlari ajratilgan sistemaning bazis noma'lumlari tizimi.
7. Noma'lumlari ajratilgan sistemaning erkli noma'lumlari.
8. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi.
9. Gauss usuli.
10. Sistema ustida elementar almashtirishlar.
11. Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli.
12. To'g'ri yurish va teskari yurish.
13. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

6.1. Quyidagi sistemalarni teskari matritsa usulida yeching:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ 7x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 - 9x_2 = 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \\ \\ \text{d)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{g)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{h)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

6.2. Quyidagi sistemalarni Gaussning ixcham sxemasi usulida yeching:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_1 = -5 \\ -6x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -2 \\ 3x_1 - 9x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{e)} \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{f)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{h)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{i)} \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{j)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases} \quad \text{k)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

6.3. Quyidagi sistemalarni Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - 0,5x_2 = 0,5 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_3 = -5 \end{cases} \quad \text{e)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{f)} \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{h)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases} \quad \text{j)} \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases}$$

$$\text{k)} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 9 \\ 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 3x_5 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

6.4. Quyida berilgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemalaridan aniqmaslarini ajratib ko'rsating va ularning umumiy yechimini yozing:

$$\text{a)} \begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ 9x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2,5x_1 - 1,6x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - 0,5y - 1,5z = 0 \end{cases} \quad \text{f)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{g)} \begin{cases} x - 4y - z = 0 \\ 3x - 6y - z = 0 \\ -x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{h)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

6.5. Quyidagi bir jinsli sistemalar λ parametrlarning qanday qiymatlarida nolmas yechimlarga ham ega ekanligini aniqlang:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - (2-\lambda)x_2 = 0 \\ (\lambda-4)x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} \lambda x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

6.6. Quyida berilgan sistemalar λ parametrlarning qanday qiymatlarida birgalikda emasligini aniqlang:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = \lambda^2 \\ x_1 - 3x_2 = 8 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -\lambda \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \lambda \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (38-50 betlar) [4] (14-19 betlar) [6] (26-41 betlar)
[7] (25-36 betlar) [13] (88-103 betlar)

7- MA'RUZA. ARIFMETIK VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

Reja:

1. **n-o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo. Arifmetik vektor haqida tushuncha.**
2. **Arifmetik vektorlar ustida chiziqli amallar va ularning xossalari.**
3. **Arifmetik vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Vektor uzunligi. Skalyar ko'paytma xossalari.**
4. **Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi. Vektorlar orasidagi burchak. Uchburchak tengsizligi.**

1. O'rta maktab matematika kursida real fazo vektorlari – yo'nalishli kesma shaklida tasvirlanishi mumkin bo'lgan geometrik vektorlar va ular ustida amallar o'rganilgan edi. Maktab kursida real (bir, ikki va uch o'lchovli) fazo vektorlari va nuqtalari orasida o'zaro birga - bir moslik borligini o'qish muhimdir. Real R_3 fazo tushuncha va elementlarini ixtiyoriy n ($n \geq 4, n \in N$) o'lchovli fazo uchun yoyish yoki umumlashtirish mumkin. n o'lchovli haqiqiy fazo abstrakt - to'qima tushuncha bo'lib, uning vektorlarini yo'nalishli kesma – geometrik vektor shaklida emas, balki arifmetik ifodalash mumkin.

n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo tushuncha va elementlari murakkab, xususan iqtisodiy jarayonlarni matematik tekshirish imkonini beradi.

n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo deb, mumkin bo'lgan barcha n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to'plamiga aytiladi va R_n yozuv bilan belgilanadi.

Har bir alohida olingan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tizim R_n fazo arifmetik vektori yoki nuqtasi deyiladi. x_1, x_2, \dots, x_n haqiqiy sonlarga x vektor yoki nuqtaning mos koordinatalari yoki komponentlari deyiladi. Tizim koordinatalari soni n esa x arifmetik vektor yoki nuqta o'lchovi deyiladi.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorning qarama-qarshi vektori deb,

$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ vektorga aytiladi. n ta nollardan iborat $(0, 0, \dots, 0)$ tizimga n o'lchovli nol vektor deyiladi va θ harfi bilan belgilanadi.

Ikki n o'lchovli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ arifmetik vektorlar berilgan bo'lsin.

$x_i = y_i$ ($i = \{1, 2, \dots, n\}$) munosabatlar o'rinli, ya'ni vektorlarning har bir mos koordinatalari o'zaro teng bo'lsa, x va y vektorlarga o'zaro teng vektorlar deyiladi. x va y vektorlarning tengligi $x = y$ ko'rinishda yoziladi.

2. n o'lchovli arifmetik vektorlar ustida **chiziqli amallar** quyidagicha bajariladi:

1. Berilgan x va y vektorlarni qo'shganda ularning mos koordinatalari qo'shiladi:

$$x + y = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n).$$

2. Berilgan \mathbf{x} vektorni k haqiqiy songa ko'paytirganda uning har bir koordinatasi k marta ortadi:

$$k \mathbf{x} = (k x_1; k x_2; \dots; k x_n).$$

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga bo'ysunadi:

- | | |
|---|--|
| 1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$ | 5) $(\alpha + \beta) \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x};$ |
| 2) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z};$ | 6) $\alpha (\beta \mathbf{x}) = (\alpha \beta) \mathbf{x};$ |
| 3) $\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y};$ | 7) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};$ |
| 4) $\alpha (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y};$ | 8) $\mathbf{x} 1 = \mathbf{x};$ |

bu yerda, \mathbf{x}, \mathbf{y} va \mathbf{z} – arifmetik vektorlar, α va β esa haqiqiy sonlar.

3. Berilgan $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ va $\mathbf{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ arifmetik vektorlarning **skalyar ko'paytmasi** deb, vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng songa aytiladi va (\mathbf{x}, \mathbf{y}) shaklda yoziladi. Ta'rifga binoan:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \text{ yoki } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Berilgan $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ vektorning moduli yoki uzunligi (normasi) deb, quyidagi formula bo'yicha aniqlanadigan nomanfiy $|\mathbf{x}|$ songa aytiladi:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \text{ yoki } |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagi xossalarga bo'ysunadi:

- | | |
|---|---|
| 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0,$ | 3) $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}),$ |
| 2) $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y}),$ | 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}).$ |

4. Skalyar ko'paytma xossalaridan foydalanib, quyidagi **Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini** isbotlash mumkin:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|.$$

Tengsizlik bo'yicha \mathbf{x} va \mathbf{y} vektorlar skalyar ko'paytmasi absolyut qiymati vektorlar modullari ko'paytmasidan katta emas.

Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi koordinatalarda

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

ko'rinishda yoziladi. Shunday bir yagona $\lambda = \cos \varphi \in [-1; 1]$ ($\varphi \in [0; \pi]$) son tanlash mumkinki, bunda

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \varphi \quad (\varphi \in [0; \pi]).$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglikdan real fazoda bo'lgani kabi, abstrakt R_n fazoda ham uning x va y arifmetik vektorlari orasidagi burchak kattaligi kosinusini aniqlash mumkin:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| |y|} \quad (\varphi \in [0; \pi]).$$

R_n fazoda ham **uchburchak** yoki **Minkovskiy tengsizligi** deb ataluvchi

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

tengsizlik o'rinli.

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar:

1. n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo deganda nimani tushunasiz?
2. n o'lchovli arifmetik vektor yoki nuqta debchi?
3. Qanday arifmetik vektorlarga o'zaro teng vektorlar deyiladi?
4. Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda qanday amallar tushuniladi?
5. Arifmetik vektorlar qanday qo'shiladi?
6. Arifmetik vektor va son qanday ko'paytiriladi?
7. Vektorlar ustida bajariladigan chiziqli amallar bo'ysunadigan xossalarni sanab o'ting?
8. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
10. Arifmetik vektor uzunligi debchi?
11. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'ysunadigan qanday xossalarni bilasiz?
12. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini yozing?
13. n o'lchovli fazo arifmetik vektorlari orasidagi burchakni topish masalasini qo'yish mumkinmi?
14. Uchburchak yoki Minkovskiy tengsizligini yozing?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. n o'lchovli arifmetik fazo.
2. Arifmetik vektor.
3. Nol vektor.
4. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
5. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.
6. Arifmetik vektor uzunligi yoki moduli.
7. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi.
8. Arifmetik vektorlar orasidagi burchak.
9. Uchburchak tengsizligi.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

7.1. Geometrik **a** va **b** vektorlar o'zaro qanday xususiyatga ega bo'lganda quyidagi munosabatlar bajariladi:

a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

d) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| > |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, e) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| < |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, f) $\mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$

g) $\mathbf{a}/|\mathbf{a}| + \mathbf{b}/|\mathbf{b}| = \mathbf{0}$

7.2. λ parametrning qanday qiymatlarida $\mathbf{a}(1; \sqrt{\lambda} + 3; -5; 6/(\lambda+1))$ va $\mathbf{b}(2-\lambda; 2\lambda; -5; \log_2(\lambda+7))$ vektorlar o'zaro teng, $\mathbf{c}(\lambda^2-1; 0; \lg|\lambda|; 0; \arccos|\lambda|)$ esa nol vektor bo'lishini toping?

7.3. $\mathbf{a} = (-2; 1; -2)$ va $\mathbf{b} = (3; -4; 0)$ vektorlar berilgan. Quyidagi amallarni bajaring yoki hisoblang:

a) $-2\mathbf{a}$, b) $5\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, c) (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , d) $\sqrt{\mathbf{b}^2}$, e) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$, f) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$, g) $(3\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-2\mathbf{b})$.

7.4. Quyidagi vektorlar orasidagi burchaklarni toping:

a) $\mathbf{a}(\sqrt{3}; -1)$ va $\mathbf{b}(0; 1)$ b) $\mathbf{a}(-5; 3; -1)$ va $\mathbf{b}(-2; -3; 1)$

c) $\mathbf{a}(1; 0; 1; 0)$ va $\mathbf{b}(1; 1; 1; 1)$ d) $\mathbf{a}(1; 1; 1; 1; 0)$ va $\mathbf{b}(2; 0; 1; 0; 2)$.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

[2] (51-68 betlar)

[6] (42-63 betlar)

[7] (43-57 betlar)

[13] (44-48 betlar)

8- MA'RUZA. VEKTORLAR SISTEMASI

Reja:

1. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini vektor tenglama shaklida yozish.
2. Vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yoyish.
3. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar sistemalari .

1. n o'lchovli m ta vektorlardan iborat quyidagi

$$\begin{cases} a_1(a_{11}; a_{21}; \dots; a_{n1}) \\ a_2(a_{12}; a_{22}; \dots; a_{n2}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_m(a_{1m}; a_{2m}; \dots; a_{nm}) \end{cases} \quad (*)$$

vektorlar sistemasi va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

n o'lchovli $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m$ yoki $\sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{a}_j$ vektorga $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$

vektorlarning mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ koeffitsiyentli **chiziqli kombinatsiyasi** deyiladi.

Masala. $\mathbf{a}_1(1; -1; 2; -3)$, $\mathbf{a}_2(3; 0; 1; -2)$, $\mathbf{a}_3(-1; 2; 1; 3)$ vektorlar sistemasi berilgan. $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$ chiziqli kombinatsiya koordinatalarini aniqlang.

Vektorlar ustida ko'rsatilgan chiziqli amallarni bajaramiz:

$$2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = 2 * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1-3+3*(-1) \\ 2*(-1)-0+3*2 \\ 2*2-1+3*1 \\ 2*(-3)-(-2)+3*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Demak, $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = (-4; 4; 6; 5)$.

Vektorlar ustida chiziqli amallardan foydalanib, vektorlar tengligi ta'rifiga asosanib, m noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1m} * x_m = b_1 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2m} * x_m = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \dots + a_{nm} * x_m = b_m \end{cases} \quad \text{ko'rinishini quyidagicha}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} * x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} * x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} * x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

yoki $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \dots + a_m * x_m = b$ yoki $\sum_{j=1}^m x_j * a_j = b \quad (1)$

vektor shaklda yozish mumkin. (1) tenglik **chiziqli tenglamalar sistemasini yozishning vektor shakli** deyiladi.

$\mathbf{a}_j(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ ($j=\{1; 2; \dots; m\}$) mos ravishda \mathbf{j} – shart vektori, $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorga esa cheklash vektori deyiladi. (1) vektor tenglamani qanoatlantiruvchi mumkin bo'lgan barcha m ta haqiqiy sonlarning tartiblangan $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m)$ tizimlari to'plamiga uning yechimi deyiladi. Agar $(k_1; k_2; \dots; k_m)$ tizim (1) tenglama echimlaridan biri bo'lsa, u xolda $k_1 \cdot \mathbf{a}_1 + k_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + k_m \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{b}$ yoki

ixchamroq yozganda $\sum_{j=1}^m k_j \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{b}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Boshqacha aytganda \mathbf{a}_j , ($j=\{1; 2; \dots; m\}$) shart vektorlarining mos ravishda k_j , ($j=\{1; 2; \dots; m\}$) koeffitsiyentli chiziqli kombinatsiyasi \mathbf{b} cheklash vektoriga teng.

2. (*) vektorlar sistemasi va $\mathbf{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$ vektor berilgan bo'lsin.

Ta'rifga binoan $\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \mathbf{a}_j$ va \mathbf{b} vektorlarning o'zaro tengligini ta'minlaydigan

tartiblangan $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m)$ tizim tanlash (tayinlash yoki ko'rsatish) mumkin bo'lsa, n o'lchovli \mathbf{b} vektor berilgan n o'lchovli (*) vektorlar sistemasi bo'yicha yoyiladi deyiladi. $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m$ sonlar *yoyilma koeffitsiyentlari* deb ataladi.

\mathbf{b} vektorni berilgan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar sistemasi bo'yicha yoyish uchun

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j \cdot x_j = \mathbf{b}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining echimlaridan birini ko'rsatish

yetarli. Agar $\sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j \cdot x_j = \mathbf{b}$ chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda va aniq

bo'lsa, \mathbf{b} vektor (*) sistema vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyiladi, agar birgalikda va aniqmas bo'lsa, cheksiz ko'p usulda yoyilishi mumkin. Agarda chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmasa, \mathbf{b} vektor (*) sistema vektorlari bo'yicha yoyilmaydi.

Masala. $\mathbf{b}(3; -7; 6; 9)$ vektorni $\mathbf{a}_1(1; -1; 2; 0)$, $\mathbf{a}_2(2; -2; 1; 3)$, $\mathbf{a}_3(-1; 3; 0; 1)$, $\mathbf{a}_4(-3; 1; 2; 4)$ vektorlar sistemasi bo'yicha yoying.

$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot x_1 + \mathbf{a}_2 \cdot x_2 + \mathbf{a}_3 \cdot x_3 + \mathbf{a}_4 \cdot x_4$ vektor tenglama tuzamiz va uning echimini Gauss-Jordan usulida aniqlaymiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Demak, b vektor berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yagona usulda $b = a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4$ ko'rinishda yoyiladi.

3. n o'lchovli m ta vektorlardan iborat (*) vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = \theta$ (bu yerda θ - n o'lchovli nol vektor) vektor tenglama yoki shuning o'zi m ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = \theta$ vektor tenglama aniq bo'lib, yagona trivial (nol) yechimga ega bo'lsa, (*) vektorlar sistemasi o'zaro chiziqli bog'lik bo'lmagan yoki chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = \theta$ vektor tenglama aniqmas bo'lib, trivial yechimdan tashqari notrivial (nolmas) yechimlarga ham ega bo'lsa, (*) vektorlar sistemasi chiziqli bog'lik sistema deyiladi. Aniqlik uchun nolmas $(x_1; x_2; \dots; x_m)$ echimda $x_m \neq 0$ bo'lsin. Unda

$$a^{(m)} = -(x_1/x_m)a_1 - (x_2/x_m)a_2 - \dots - (x_{m-1}/x_m)a_{m-1}$$

munosabat o'rinli bo'lib, (*) vektorlaridan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasiga teng. Bu esa sistemaning chiziqli bog'liqligini anglatadi.

Agar vektorlar sistemasi yagona nolmas vektordan tashkil topgan bo'lsa -

- chiziqli erkli; yagona nol vektordan iborat bo'lsa, chiziqli bog'likdir.

Chiziqli erkli sistemaning har qanday qism osti sistemasi - chiziqli erkli, chiziqli bog'lik sistemaning har qanday kengaytirilgan sistemasi esa chiziqli bog'liqdir. Demak, tarkibida nol vektor mavjud har qanday vektorlar sistemasi chiziqli bog'likdir. Berilgan sistema vektorlari koordinatalaridan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matritsa tuzamiz.

(*) vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liqligi quyidagi teorema yordamida aniqlanadi.

Teorema. Agar berilgan (*) sistema vektorlari aniqlaydigan A matritsa rangi r sistema vektorlari soni m ga teng bo'lsa, ya'ni $r = m$, (*) sistema chiziqli erkli, agarda A matritsa rangi r , sistema vektorlari soni m dan kichik, ya'ni $r < m$ bo'lsa, (*) sistema chiziqli bog'liqdir.

Teorema isboti bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yagona trivial yechimga egaligi va trivial yechimdan tashqari notrivial yechimlarga egaligi haqidagi teorema asosida isbotlanadi va uning shartlari tasdig'ini quyidagi xususiy misollarda tekshirib ko'rish mumkin.

Masalalar.

- 1) R_2 haqiqiy fazoda (koordinatalar tekisligida) ikki $a_1(a_{11}; a_{21})$ va $a_2(a_{12}; a_{22})$ vektorlardan iborat sistema berilgan bo'lsin. Agar vektorlar kollinear bo'lmasa, $r(A) = 2 = m$ munosabatlar o'rinli va sistema - chiziqli erkli. Agarda vektorlar kollinear bo'lsa, $r(A) = 1 < 2 = m$ munosabatlar o'rinli bo'lib, sistema chiziqli bog'liqdir.

- 2) R_2 haqiqiy fazoda a_1, a_2, \dots, a_k ($k \geq 3$) vektorlar berilgan bo'lsin. Ushbu holda $r(A) \leq 2 < k = m$ munosabatlar o'rinli bo'lib, sistemaning ixtiyoriy vektori qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida tasvirlanishi mumkin. R_2 fazoda 3 ta va undan ortiq vektorlar sistemasi har doim chiziqli bog'liq sistemani tashkil etadi.
- 3) R_3 haqiqiy fazoda $a_1(a_{11}; a_{12}; a_{13})$ va $a_2(a_{12}; a_{22}; a_{32})$ vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar vektorlar kollinear bo'lmasa, $r(A)=2=2 = m$ munosabatlar o'rinli va sistema chiziqli erkli. Agarda vektorlar kollinear bo'lsa, $r(A) = 1 < 2 = m$ shartlar bajariladi va sistema chiziqli bog'liqdir.
- 4) R_3 haqiqiy fazoda a_1, a_2, a_3 vektorlardan iborat sistema berilgan bo'lsin. Agar vektorlar o'zaro komplanar bo'lmasa, $r(A)=3=3 = m$ munosabatlar o'rinli va sistema – chiziqli erkli. Aks xolda, $r(A) \leq 2 < 3 = m$ shartlar o'rinli bo'lib sistema chiziqli bog'liqdir.
- 5) R_3 haqiqiy fazoda a_1, a_2, \dots, a_k ($k \geq 4$) vektorlar sistemasi uchun $r(A) \leq 3 < k = m$ munosabatlar o'rinli bo'lib, sistema har doim chiziqli bog'liq. R_3 fazoda kamida to'rtta vektorlardan iborat har qanday sistema chiziqli bog'liqdir va hokazo.

Masala. $a_1(2; -1; 3; 0)$ $a_2(8; -9; 1; -4)$ $a_3(-3; 4; 1; 2)$ vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liqligini aniqlang.

Sistema vektorlari koordinatalaridan matritsa tuzamiz va uning rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$r(A) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -1 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 5/2 \\ 3 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$r(A) = 2 < 3 = m$ munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun berilgan sistema chiziqli bog'liq sistemani tashkil etadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
2. m ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal shaklini vektor shaklda yozing.
3. Vektor tenglamaning yechimi deb nimaga aytiladi?
4. Berilgan vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha qanday yoyish mumkin?
5. Berilgan vektor berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yagona, cheksiz ko'p usullarda yoyilishi yoki umuman yoyilmasligi mumkinmi?
6. Qanday vektorlar sistemasiga chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi?
7. Chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
8. Yagona nolmas vektordan, yagona nol vektordan iborat sistemalar qanday sistemalar?

9. Chiziqli erkli sistemaning qism osti, chiziqli bog'liq sistemaning kengaytirilgan va tarkibida nol vektor mavjud vektorlar sistemalari haqida nimalar deyish mumkin?
10. Vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liq bo'lishi yetarli shartlari nimalardan iborat?
11. R_2 fazoda berilgan ikki o'zaro kollinear va nokollinear vektorlar haqida nimalar deyish mumkin? R_2 fazoning har qanday uchta vektorlari haqidachi?
12. R_3 fazoda berilgan uchta o'zaro komplanar va nokomplanar vektorlar haqida nimalar deyish mumkin? R_3 fazoning har qanday to'rtta vektorlari haqidachi?

Mavzuning tayanch iboralari

1. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi.
2. Chiziqli kombinatsiya koeffitsientlari.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yozishning shakllaridan biri-
vektor tenglama.
4. Shartlar va cheklash vektorlari.
5. Vektor tenglama yechimi.
6. Vektorni vektorlar sistemasi bo'yicha yoyish.
7. Chiziqli erkli vektorlar sistemasi.
8. Chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

Quyida vektorlar sistemasi va ularning chiziqli kombinatsiyasi berilgan:

- a) $\mathbf{a}_1(1; -3)$, $\mathbf{a}_2(2; 5)$, $\mathbf{a}_3(-2; 1)$ va $-\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$;
 b) $\mathbf{a}_1(0; 2; -1)$, $\mathbf{a}_2(4; -3; 2)$ va $3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$;
 c) $\mathbf{a}_1(-1; 0; 3; -2)$, $\mathbf{a}_2(2; 3; -1; 5)$, $\mathbf{a}_3(-3; 4; 1; 2)$ va $2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$.
 Chiziqli kombinatsiyalar koordinatalarini aniqlang.

b vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yozing:

- a) $\mathbf{b}(5; 3) : \mathbf{a}_1(1; -4)$, $\mathbf{a}_2(3; 5)$ b) $\mathbf{b}(-3; 7) : \mathbf{a}_1(1; -2)$, $\mathbf{a}_2(-2; 4)$;
 c) $\mathbf{b}(9; -2; -3) : \mathbf{a}_1(4; 1; 5)$, $\mathbf{a}_2(-5; -1; -4)$, $\mathbf{a}_3(1; -1; 2)$;
 d) $\mathbf{b}(1; -3; 2) : \mathbf{a}_1(1; -2; -2)$, $\mathbf{a}_2(-3; 5; 6)$;
 e) $\mathbf{b}(6; -1; -8) : \mathbf{a}_1(1; 2; 3)$, $\mathbf{a}_2(-4; 1; 6)$, $\mathbf{a}_3(5; 2; -1)$;
 f) $\mathbf{b}(1; -3; 2) : \mathbf{a}_1(1; 4; -1)$, $\mathbf{a}_2(-2; 1; 3)$, $\mathbf{a}_3(-5; -2; 7)$;
 g) $\mathbf{b}(3; -1; 4; 5) : \mathbf{a}_1(2; 1; 3; 2)$, $\mathbf{a}_2(1; -2; 4; -4)$, $\mathbf{a}_3(3; 1; -5; 2)$, $\mathbf{a}_4(-4; -3; 1; -6)$;
 h) $\mathbf{b}(2; 1; -4; 0) : \mathbf{a}_1(1; 2; 1; 3)$, $\mathbf{a}_2(-3; 1; 5; -1)$, $\mathbf{a}_3(2; 4; -1; 6)$, $\mathbf{a}_4(1; 3; 1; 5)$.

Quyidagi vektorlar sistemalarining chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liqligini aniqlang;

- a) $\mathbf{a}_1(1; -3), \mathbf{a}_2(-2; 6);$ b) $\mathbf{a}_1(1; -3), \mathbf{a}_2(-2; 5);$ c) $\mathbf{a}_1(1; -3; 2), \mathbf{a}_2(2; -6; 5);$
d) $\mathbf{a}_1(-2; 4; 6), \mathbf{a}_2(-3; 6; 9)$ e) $\mathbf{a}_1(1; 4; 5), \mathbf{a}_2(2; -1; 1), \mathbf{a}_3(-1; 1; 3);$
f) $\mathbf{a}_1(2; 1; -4), \mathbf{a}_2(2; -1; 1), \mathbf{a}_3(-1; 1; 3);$
g) $\mathbf{a}_1(2; 0; -1; 1), \mathbf{a}_2(3; 8; -1; 5), \mathbf{a}_3(1; 0; -2; 4), \mathbf{a}_4(-1; 0; 1; -3);$
h) $\mathbf{a}_1(1; 0; 0; 1), \mathbf{a}_2(2; -1; 2; -1), \mathbf{a}_3(3; 2; 4; 1), \mathbf{a}_4(1; 1; 1; 1).$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (51-68 betlar)
[6] (42-63 betlar)
[7] (43-57 betlar)
[13] (44-48 betlar)

9- MA'RUZA. VEKTORLAR SISTEMASINING BAZISI VA RANGI. KANONIK BAZIS

Reja:

1. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi.
2. Ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari.
3. R_n fazoda bazis va koordinatalar. Kanonik bazis.

1. n o'lchovli m ta $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlardan iborat vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, chiziqli bog'liq sistemani tashkil etsin. $\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ ($1 \leq i < j < \dots < k \leq m$) sistema esa berilgan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ sistemaning qism osti sistemalaridan biri bo'lsin.

Agar: birinchidan, $\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ ($1 \leq i < j < \dots < k \leq m$) sistema chiziqli erkli; ikkinchidan, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ sistemaning har bir vektori $\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ ($1 \leq i < j < \dots < k \leq m$) sistema vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyilsa, u holda $\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}$ ($1 \leq i < j < \dots < k \leq m$) vektorlar sistemasiga $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar sistemasining bazisi deyiladi.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini sistemaning bazisigacha to'ldirish mumkin.

Berilgan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ sistemaning bazislaridan birini topish uchun $\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_mx_m = \mathbf{0}$ vektor tenglama tuziladi va uning biror-bir ko'rinishdagi umumiy yechimi quriladi. Qurilgan umumiy yechimning bazis noma'lumlari oldidagi mos koeffitsiyent – vektorlardan iborat sistema uning bazisini tashkil etadi. Xar qanday chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi umumiy yechim ko'rinishlariga mos holda bir nechta bazisga ega bo'lishi mumkin. Har bir bazisdagi vektorlar soni esa tengligicha qoladi.

Berilgan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar sistemasining ixtiyoriy bazisi tarkibidagi vektorlar soniga uning rangi deyiladi.

Masala: Quyida berilgan vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va rangini aniqlang: $\mathbf{a}_1(1; -1; 2; 3)$, $\mathbf{a}_2(-2; -3; 0; 1)$, $\mathbf{a}_3(-2; -9; 4; 6)$, $\mathbf{a}_4(-1; 2; -2; -1)$.

$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 + \mathbf{a}_4x_4 = \mathbf{0}$ vektor tenglama umumiy yechimini Gauss-Jordan usulida quramiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -9 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

x_1, x_2 va x_4 noma'lumlar umumiy yechimning bazis noma'lumlari. Demak, mos ravishda, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ va \mathbf{a}_4 vektorlar tizimi berilgan sistemaning bazislaridan birini tashkil etadi. Tizim 3 ta vektordan tarkib topgani uchun, berilgan vektorlar sistemasining rangi 3 ga teng.

Agar $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar sistemasining rangi r ga teng bo'lsa, u holda sistemaning r ta vektoridan tuzilgan har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasi uning bazisi bo'ladi.

2. Agar berilgan ikki n o'lchovli \mathbf{a}_1 va \mathbf{a}_2 vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, \mathbf{a}_1 va \mathbf{a}_2 vektorlar o'zaro **ortogonal vektorlar** deyiladi. «Ortogonal» iborasi real fazo vektorlari uchun «perpendikulyar» iborasi bilan almashtirilishi mumkin. Masalan, $\mathbf{a}_1(-1; 2; 0; 3)$ va $\mathbf{a}_2(4; 2; -5; 0)$ vektorlar o'zaro ortogonal vektorlardir, chunki $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = -1*4+2*2+0*(-5)+3*0 = 0$.

n o'lchovli vektorlardan tarkib topgan vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, sistema vektorlarining har qanday ikki jufti o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda sistemaga **ortogonal vektorlar sistemasi** deyiladi.

Masalan, $\mathbf{a}_1(3; 2; 1)$, $\mathbf{a}_2(2; -3; 0)$, $\mathbf{a}_3(-3; -2; 13)$ vektorlar sistemasi ortogonaldir, chunki $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)=0$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)=0$ va $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)=0$.

Har qanday nolmas vektorlardan iborat ortogonal vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir.

n o'lchovli k ta $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorlardan iborat chiziqli erkli sistema berilgan bo'lsin. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini qurish mumkin, ya'ni chiziqli erkli $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sistemani, mos ravishda $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin. Almashtirish quyidagi Shmidt formulalari yordamida amalga oshiriladi:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_t = \mathbf{a}_t - \sum_{i=1}^{t-1} [(\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_t)/(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)] * \mathbf{b}_i, (t \in \{2; 3; \dots; k\}).$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida ortogonal

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ vektorlar sistemasini keltirilgan qurish usuli

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorlar sistemasini **ortogonallashtirish jarayoni** deyiladi.

Masala: $\mathbf{a}_1(1; 1; 1)$, $\mathbf{a}_2(0; 1; 1)$, $\mathbf{a}_3(0; 0; 1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir, chunki rang $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)=3 = 3$ (vektorlar soni). Demak, ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, berilgan sistemani $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin.

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1(1; 1; 1);$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - [(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)/(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)] * \mathbf{b}_1 = (0; 1; 1) - 2/3(1; 1; 1) = (-2/3; 1/3; 1/3);$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - [(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3)/(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)] * \mathbf{b}_1 - [(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3)/(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)] * \mathbf{b}_2 = (0; 0; 1) - 1/3*(1; 1; 1) -$$

$$- (1/3)/(2/3)*(-2/3; 1/3; 1/3) = (0; -1/2; 1/2).$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, $(1; 1; 1)$; $(-2; 1; 1)$; $(0; -1; 1)$ natijani olamiz.

Nolmas \mathbf{b} vektorning normallangan yoki birlik vektori deb, $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori normallangan, ya'ni birlik vektor ko'rinishga keltirilgan ortogonal sistemaga **ortonormallangan vektorlar sistemasi** deyiladi.

Agar $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ ortogonal vektorlar sistemasi bo'lsa, $\mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|, \mathbf{b}_2/|\mathbf{b}_2|, \dots, \mathbf{b}_k/|\mathbf{b}_k|$ ortonormallangan vektorlar sistemasidir.

Masala. $\mathbf{a}_1(1; 1; 1), \mathbf{a}_2(0; 1; 1), \mathbf{a}_3(0; 0; 1)$ vektorlar sistemasi ustida ortonormallangan sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi ustida dastlab qurilgan ortogonal $\mathbf{b}_1(1; 1; 1); \mathbf{b}_2(-2; 1; 1); \mathbf{b}_3(0; -1; 1)$ sistemaning har bir vektorini birlik ko'rinishiga keltiramiz.

$$\mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1| = (1/\sqrt{1^2+1^2+1^2}) (1; 1; 1) = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$$

$$\mathbf{b}_2/|\mathbf{b}_2| = (1/\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}) (-2; 1; 1) = (-2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6})$$

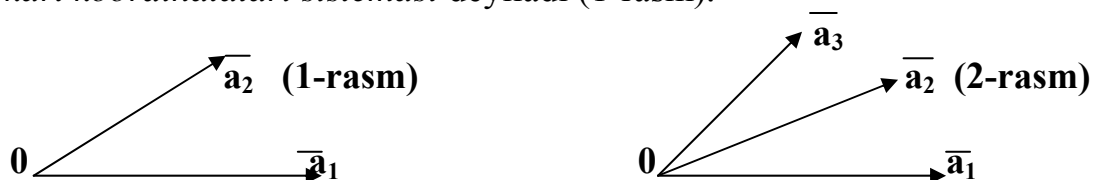
$$\mathbf{b}_3/|\mathbf{b}_3| = (1/\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}) (0; -1; 1) = (0; -1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$$

Ortonormallangan sistema $(1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}), (-2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}), (0; -1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ vektorlar tarkibidan iborat.

3. n – o'lchovli haqiqiy arifmetik R_n fazoning bazisi deb, har qanday chiziqli erkli n – o'lchovli n ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi. n – o'lchovli n ta $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorlardan iborat tartiblangan tizim R_n fazo bazisi va \mathbf{a} uning ixtiyoriy vektori bo'lsin. U holda \mathbf{a} vektor tanlangan bazis vektorlari bo'yicha ularning yagona chiziqli kombinatsiyasi $\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$ ko'rinishida yoyilishi mumkin. x_1, x_2, \dots, x_n haqiqiy sonlarga \mathbf{a} vektorning $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ bazisdagi koordinatalari deyiladi.

Xususan, haqiqiy koordinatalar tekisligi (R_2) bazisi deb, tekislikda tanlangan ixtiyoriy tartiblangan ikkita nokollinear vektorlarga aytiladi.

R_2 fazoda tanlangan 0 nuqta va $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2$ bazis birgalikda tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi deyiladi (1-rasm).



Ixtiyoriy $\mathbf{a} \in R_2$ vektor tanlangan $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2$ bazis vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

Haqiqiy real uch o'lchovli fazo (R_3) bazisi deb, unda ixtiyoriy tanlangan uchta tartiblangan nokomplanar vektorlarga aytiladi.

R_3 fazoda tanlangan 0 nuqta va $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ bazis birgalikda fazoda Dekart koordinatalari sistemasi deyiladi (2-rasm). Ixtiyoriy $\mathbf{a} \in R_3$ vektor tanlangan $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ bazis vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

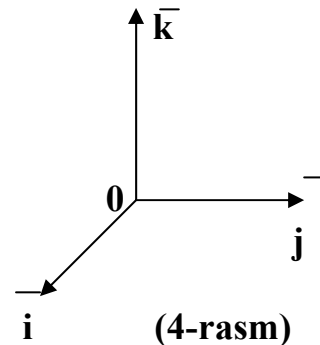
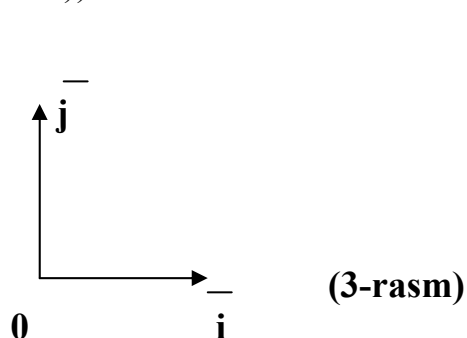
n -o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo (R_n) ortogonal bazisi deb, vektorlari juft-jufti bilan o'zaro ortogonal bo'lgan bazisga aytiladi.

R_n fazo ortonormallangan bazisi deb esa, har bir vektori normallangan ortogonal bazisga aytiladi.

n -o'lchovli n ta $\mathbf{e}_1(1; 0; \dots; 0)$, $\mathbf{e}_2(0; 1; \dots; 0)$, ..., $\mathbf{e}_n(0; 0; \dots; 1)$ vektorlardan iborat ortonormallangan bazisga R_n fazo **kanonik bazisi** deyiladi.

Xususan $\mathbf{i}(1; 0)$, $\mathbf{j}(0; 1)$ bazis R_2 fazo kanonik bazisi deyilsa, $\mathbf{i}(1; 0; 0)$, $\mathbf{j}(0; 1; 0)$, $\mathbf{k}(0; 0; 1)$ bazis esa R_3 fazo kanonik bazisi deyiladi.

Tekislikda (fazoda) ortonormallangan bazisli Dekart koordinatalar sistemasiga *to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi* deyiladi (3-rasm (4-rasm)).



R_n fazoda berilgan ixtiyoriy chiziqli erkli vektorlar sistemasini fazo bazisigacha to'ldirish mumkin.

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vektorlar sistemasi bazisi deb nimaga aytiladi?
2. Vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini uning bazisigacha to'ldirish mumkinmi?
3. Chiziqli bog'liq vektorlar sistemasining bazislaridan biri qanday quriladi?
4. Chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi bir necha bazisga ega bo'lishi mumkinmi va nima uchun?
5. Vektorlar sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
6. Ortogonal vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
7. Chiziqli erkli vektorlar sistemasini ortogonal sistemaga aylantirish mumkinmi va qanday?
8. Ortogonallash jarayoni deganda nimani tushunasiz?
9. Ortonormallangan vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
10. Ortogonal sistemani ortonormallangan sistemaga aylantirish jarayoni nimadan iborat?
11. n - o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
12. R_n fazo ixtiyoriy vektorini uning bazisi bo'yicha yoyish mumkinmi va qanday?
13. R_n fazo kanonik bazisi deb nimaga aytiladi?

Mavzuning tayanch iboralari

1. Vektorlar sistemasi bazisi.
2. Vektorlar sistemasi rangi.
3. Ortogonal vektorlar sistemasi.
4. Ortogonallashtirish jarayoni.
5. Ortonormallashtirilgan vektorlar sistemasi.
6. Fazo bazisi.
7. Kanonik bazis.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

9.1. Quyida berilgan vektorlar sistemalarining bazislaridan birini quring va ranglarini aniqlang:

- a) $\mathbf{a}_1(2; -5)$, $\mathbf{a}_2(-6; 15)$; b) $\mathbf{a}_1(3; -1; 2)$, $\mathbf{a}_2(1; 4; -1)$, $\mathbf{a}_3(7; 2; 3)$;
c) $\mathbf{a}_1(1; 2; -1; 3)$, $\mathbf{a}_2(0; 3; 4; 1)$, $\mathbf{a}_3(-2; -1; 6; -5)$, $\mathbf{a}_4(5; 4; 2; -4)$;
d) $\mathbf{a}_1(-3; 1; 1; 4)$, $\mathbf{a}_2(-2; 0; -1; 5)$, $\mathbf{a}_3(5; -3; -5; -2)$, $\mathbf{a}_4(-1; 1; 2; -1)$;
e) $\mathbf{a}_1(1; -2; 3; 0; -1)$, $\mathbf{a}_2(2; 4; -1; 3; 1)$, $\mathbf{a}_3(-3; 1; 0; 4; 2)$, $\mathbf{a}_4(-6; -9; 5; -2; -1)$;
 $\mathbf{a}_5(-9; 0; -2; 5; 4)$.

9.2. Vektorlar juftliklaridan o'zaro ortogonalini ajrating:

- a) $\mathbf{a}_1(2; -3)$ va $\mathbf{a}_2(6; 4)$; b) $\mathbf{a}_1(-4; 3)$ va $\mathbf{a}_2(2; 3)$;
c) $\mathbf{a}_1(1; 3; 2)$ va $\mathbf{a}_2(0; 2; -3)$; d) $\mathbf{a}_1(-1; 5; -4)$ va $\mathbf{a}_2(3; 0; 2)$;
e) $\mathbf{a}_1(1; 3; 2; -3)$ va $\mathbf{a}_2(1; 1; 1; 2)$; f) $\mathbf{a}_1(1; 2; 3; 4)$ va $\mathbf{a}_2(-2; 0; 1; 2)$.

9.3. Quyida berilgan chiziqli erkin vektorlar sistemalari ustida ortogonal va ortonormallashtirilgan vektorlar sistemalari quring:

- a) $\mathbf{a}_1(1; 1)$, $\mathbf{a}_2(1; 2)$; b) $\mathbf{a}_1(1; 0; 1)$, $\mathbf{a}_2(1; 1; 1)$, $\mathbf{a}_3(1; -3; 3)$;
c) $\mathbf{a}_1(1; 1; 1; 0)$, $\mathbf{a}_2(0; 1; 1; 1)$, $\mathbf{a}_3(0; 0; 1; 1)$.

9.4. $\mathbf{a}_1(1; 3; 2)$, $\mathbf{a}_2(0; 2; -3)$, $\mathbf{a}_3(13; -3; -2)$ vektorlar sistemasi R_3 fazoning ortogonal bazisi bo'la olishini ko'rsating va $\mathbf{b}(-9; 9; 19)$ vektorning ushbu bazisidagi koordinatalarini toping.

9.5. $\mathbf{a}_1(2; 1; 1; 1)$ va $\mathbf{a}_2(-3; 2; 3; 1)$ vektorlarning ortogonalini tekshirib ko'ring. Ularni R_4 fazoning ortonormal bazisiga to'ldiring.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (51-68 betlar)
[6] (42-63 betlar)
[7] (43-57 betlar)
[13] (44-48 betlar)

10-MA'RUZA. BIR JINSLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINING FUNDAMENTAL YECHIMLARI TIZIMI. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI UMUMIY YECHIMI VECTOR SHAKLI

Reja:

1. Vektor ko'rinishda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik va aniqlik shartlari.
2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental echimlari tizimi
3. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi umumiy yechimi vektor shakli.

1. m ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = b.$$

Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun a_1, a_2, \dots, a_m shartlar vektorlari sistemasini rangining b cheklash vektori hisobiga kengaytirilgan a_1, a_2, \dots, a_m, b vektorlar sistemasi rangiga teng bo'lishi zarur va etarli.

Agar $\text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m, b) = m$ bo'lsa, sistema aniq bo'ladi.

Agar $\text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m, b) < m$ bo'lsa, sistema aniqlanmay bo'ladi.

Agarda $\text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m) < \text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m, b)$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.

m ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = 0.$$

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki shartlar vektorlari a_1, a_2, \dots, a_m sistemasi rangi cheklash nol vektori hisobiga kengaytirilgan $a_1, a_2, \dots, a_m, 0$ sistema rangiga teng va m ta nollar tizimi uning yechimi bo'lishi bilan xarakterlanadi. Bir jinsli sistema uchun $\text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m) = m$ munosabat o'rinli bo'lsa, sistema aniq bo'lib, yagona nol yechimga ega.

Agarda bir jinsli sistema uchun $\text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_m) < m$ munosabat o'rinli bo'lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham egaligi bilan xarakterlanadi. Ushbu holda har bir nolmas yechim m o'lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Demak, sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli - erkliligi yoki chiziqli - bog'liqligi haqida gapirish mumkin.

Bir jinsli sistema har qanday yechimlarining ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi uning yechimi bo'la oladi.

2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi yoki tizimi deb, uning chiziqli bog'liq bo'lmagan nolmas F_1, F_2, \dots, F_k yechimlariga aytiladiki, sistemaning har bir yechimi ushbu yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida aniqlanishi mumkin.

Bir jinsli sistema shartlar vektorlari a_1, a_2, \dots, a_m sistemasining rangi r ga teng bo'lib, sistema noma'lumlari soni n dan kichik bo'lsin. Bunday bir jinsli sistema o'zining fundamental yechimlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi va tizim har biri m o'lchovli $m - r$ nolmas vektorlardan tarkib topadi.

Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari tizimi quyidagicha quriladi:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi quriladi;
2. $m - r$ o'lchovli $m - r$ ta vektorlardan iborat biror – bir chiziqli – erkli vektorlar sistemasi tanlaniladi. Har bir vektori $m - r$ o'lchovli $e_1 (1; 0; \dots; 0), e_2 (0; 1; \dots; 0), \dots, e_{m-r} (0; 0; \dots; 1)$ sistemani tanlash mumkin;
3. Umumiy yechim erkli noma'lumlari o'rniga e_1 vektor mos koordinatalarini qo'yib, bazis noma'lumlar aniqlanadi va mos ravishda F_1 fundamental yechim quriladi. e_2, e_3, \dots, e_{m-r} vektorlardan foydalanib, mos ravishda F_2, F_3, \dots, F_{m-r} fundamental yechimlar quriladi.

Masala. Quyida berilgan bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari tizimidan birini quring va uning umumiy yechimini vektor shaklda aniqlang:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 5x_2 - 7x_3 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Sistemaning umumiy yechimini Gauss – Jordan usulida quramiz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 13/5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema noma'lumlari soni $m = 5$ va sistema rangi $r = 2$ bo'lgani uchun, $m - r = 3$.

Chiziqli – erkli $e_1 (1; 0; 0), e_2 (0; 1; 0)$ va $e_3 (0; 0; 1)$ sistemani tanlaymiz.

$e_1 (1; 0; 0)$ vektor koordinatalarini umumiy yechimning mos erkli noma'lumlari o'rniga qo'yib, bazis noma'lumlarni aniqlaymiz va $F_1 (2; 1; 0; 0; -1)$ fundamental yechimni quramiz. $e_2 (0; 1; 0)$ vektor yordamida $F_2 (-13/5; 0; 1; 0; 7/5)$ va $e_3 (0; 0; 1)$ vektor yordamida esa $F_3 (1; 0; 0; 1; 0)$ fundamental yechimlarni quramiz.

Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi qurilgan fundamental yechimlar tizimi orqali vektor shaklda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$X = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -13/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7/5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bu yerda, λ_1 , λ_2 va λ_3 ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

3. m ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = b \quad (b \neq 0).$$

Sistemaning ozod xadlari ustuni nol ustun bilan almashtirilgan

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = 0$$

ko'rinishiga dastlabki bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi deyiladi. Sistemani keltirilgan ko'rinishga keltirish uchun uning cheklash vektori **b** ni nol vektor **0** bilan almashtirish kifoya.

Berilgan bir jinslimas sistemaning umumiy yechimini vektor shaklda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$X = F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_{m-r} F_{m-r}.$$

Bu yerda, F_0 - dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy yechimlaridan biri, F_1, F_2, \dots, F_{m-r} - keltirilgan sistema fundamental yechimlari tizimi, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-r}$ - ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Masala. Quyida berilgan sistema umumiy yechimini vektor shaklda quring:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 2 \\ 5x_2 - 7x_3 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

Biz oldingi masalada berilgan sistema keltirilgan sistemasi fundamental yechimlari tizimini qurdik. Berilgan sistema xususiy yechimlaridan birini, aytaylik, $F_0 = (6/5; 0; 0; 0; 1/5)$ ni tuzish qiyin emas. Demak, berilgan sistema umumiy yechimi vektor shakli quyidagicha yozilishi mumkin

$$X = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -13/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7/5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bu yerda, λ_1 , λ_2 va λ_3 – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik yetarli sharti nimadan iborat?
2. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining aniqlik va aniqlaslik yetarli shartlari nimalardan iborat?
3. Sistemaning birgalikdamaslik yetarli shartichi?
4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi deb nimaga aytiladi?
5. Bir jinsli sistema qanday shartlar bajarilganda o'zining fundamental yechimlari tizimiga egaligi bilan xarakterlanadi?
6. Bir jinsli sistema fundamental yechimlari tizimini qurish jarayoni nimalarni o'z ichiga oladi?
7. Agar bir jinsli sistema fundamental yechimlari tizimi qurilgan bo'lsa, uning umumiy yechimini vektor shaklda yozish mumkinmi va qanday?
8. Bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi deb nimaga aytiladi?
9. Bir jinslimas sistema umumiy yechimi vektor shaklda qanday yoziladi?

Mavzunning tayanch iboralari:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi shartlar vektorlari sistemasining rangi.
2. Sistema kengaytirilgan vektorlari sistemasining rangi.
3. Bir jinsli sistema fundamental yechimlari tizimi.
4. Fundamental yechimlar tizimini qurish jarayoni.
5. Fundamental yechimlar chiziqli kombinatsiyasi.
6. Bir jinsli sistema umumiy yechimining vektor shakli.
7. Bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi.
8. Bir jinslimas sistema umumiy yechimining vektor shakli.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

10.1. Quyida berilgan bir jinsli sistemalarning fundamental yechimlari tizimlaridan birini quring va umumiy yechimlarini vektor shaklida yozing:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 4x_6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

10.2. Sistema umumiy yechimlarini vektor shaklda quring:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 2x_6 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 = -10 \end{cases}$$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (51-68 betlar)
- [6] (42-63 betlar)
- [7] (43-57 betlar)
- [13] (44-48 betlar)

11- MA'RUZA. CHIZIQLI ALGEBRA USULLARINING BA'ZI CHIZIQLI IQTISODIY MODELLARNING TAXLILIDA QO'LLANILISHI

Reja:

1. Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Rejalashtirishning asosiy masalasi.

2. Bilvosita xarajatlar haqida tushuncha. To'la xarajatlar haqida tushuncha.

1. Chiziqli algebra usullari keng ko'lamda iqtisodiyotni rejalashtirish bilan bog'liq masalalarni yechishda qo'llaniladi. Biz quyida asosan tarmoqlararo balansning matematik modeli bilan tanishamiz.

Iqtisodiyotni sonli tahlil qilish va xususan, ijtimoiy mahsulot ishlab chiqarish jarayonini tahlil qilish masalasi o'zaro ishlab chiqarish mahsulotlari va xizmatlar oqimlarini qarashga keltiriladi. Shu nuqtai nazardan iqtisodiy sistema har biri biror-bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga moslashgan tarmoqlardan iborat deb qaralishi mumkin. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar o'zaro ayirboshlanadi va tarmoqlar orasida mahsulot oqimlari vujudga keladi. O'zaro mahsulot oqimlarining vujudga kelishi muqarrardir, chunki har bir tarmoq o'z mahsulotini ishlab chiqarish jarayonida o'zga tarmoq mahsulotidan foydalanadi yoki uni sarflaydi.

Iqtisodiyotni normal rivojlanish asosiy shartlaridan biri barcha tarmoqlar bo'yicha ishlab chiqarish sarflari va umumiy yig'indi mahsulot orasida balansning mavjudligidir. Bunda ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi ishlab chiqarish tarmoqlari sohasiga qaytmasligini va shaxsiy ehtiyojni qondirishga, jamg'arishga sarflanishini yoki eksportga chiqarilishini e'tiborga olish talab etiladi.

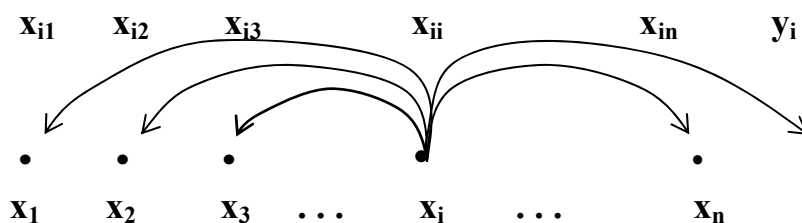
Iqtisodiy sistemaning yalpi mahsuloti uning n ta o'zaro bog'liq tarmoqlarida ishlab chiqariladi deylik. Ishlab chiqarish sikli yakunlanadigan vaqtni o'z ichiga olgan davrni qaraymiz.

x_1, x_2, \dots, x_n – mos ravishda, birinchi, ikkinchi, ..., n – tarmoqlarning natural birliklarda ishlab chiqaradigan yalpi mahsulot hajmlari bo'lsin. Aytaylik, qaralayotgan davrda x_1 – metallurgiya tarmog'ining tonna hisobida ishlab chiqaradigan metall miqdori, x_2 – kimyo tarmog'ining ishlab chiqaradigan mahsuloti miqdori, x_3 – avtomobilsozlik tarmog'ining ishlab chiqaradigan yengil avtomobillari soni bo'lsin va xokazo.

$x(x_1; x_2; \dots; x_n)$ – sistemaning yalpi mahsulot vektori deyiladi.

k – tarmoqning x_k birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i – tarmoq mahsuloti sarfini x_{ik} orqali belgilaymiz. Masalan, misolimizda $x_{13} - x_3$ dona yengil avtomobil ishlab chiqarish uchun 1-tarmoq mahsuloti metall sarfi miqdorini anglatadi. i -tarmoqning ishlab chiqarish sohasiga qaytmaydigan yakuniy mahsulot miqdori y_i bo'lsin. $y(y_1; y_2; \dots; y_n)$ – sistemaning yakuniy mahsulot vektori deyiladi.

Sistemaning i -tarmog'i mahuloti x_i uchun moddiy balans sxemasini «mahulot ishlab chiqarish va uni taqsimlash» prinsipi bo'yicha quyidagicha tasvirlash mumkin.



Moddiy balansning oqimlar tenglamalarini

$$x_i = \sum_{k=1}^n x_{ik} + y_i \quad (i=1; 2; \dots; n) \quad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

k – mahsulotning bir (shartli) birligini ishlab chiqarish uchun i -mahsulotning bevosita sarfi miqdori a_{ik} bo'lsin. a_{ik} kattaliklarga bevosita xarajat koeffitsiyentlari yoki texnologik koeffitsiyentlar deyiladi.

Masalan, misolimizga qaytsak, a_{13} – 1 dona yengil avtomobil ishlab chiqarish uchun bevosita sarflanadigan metall miqdoridir.

O'z-o'zidan ko'rinadiki, i – mahsulotning k -tarmoqqa jami sarfi x_{ik} k -tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i -mahsulotning bevosita sarfi a_{ik} ning ushbu tarmoq ishlab chiqaradigan mahsulot miqdori x_k ga ko'paytirilganiga teng.

$x_{ik} = a_{ik}x_k$ ya'ni, ishlab chiqarish sarflarida chiziqlilik prinsipi o'rinli bo'lsin. (1) tenglamalar sistemasini

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + y_i \quad \text{yoki} \quad x_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = y_i$$

ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi sistemani, o'z navbatida, vektor-matritsa ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad \text{yoki} \quad (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (2)$$

Bu erda, \mathbf{E} – n -tartibli birlik matritsa bo'lib, $\mathbf{A} = (a_{ik})$ – bevosita xarajat koeffitsiyentlari matritsasi yoki texnologik matritsa.

a_{ik} kattaliklarni o'zgarmas deb qaraymiz. (2) tenglamaga Leontevning chiziqli modeli deyiladi. Agar $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ bo'lsa, Leontev modeli yopiq, $\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ bo'lganda esa model ochiq deyiladi.

Masala quyidagi hollarning biri ko'rinishida qo'yilishi mumkin:

- 1) Yakuniy mahsulot hajmlari vektori \mathbf{Y} ga qarab, sistema yalpi mahsulot hajmi vektori \mathbf{X} ni hisoblash;
- 2) \mathbf{X} ga qarab, \mathbf{Y} ni hisoblash;

Rejalashtirishni asosiy masalalaridan biri bu birinchi masaladir, ya'ni \mathbf{U} vektorning berilishiga qarab, \mathbf{X} vektorni hisoblashdir. Leontevning ochiq modeliga tegishli asosiy masala – tegishli model ixtiyoriy yakuniy ehtiyoj \mathbf{Y} ni qondira oladimi, degan savolga javob berishdan iborat. Ma'nosiga ko'ra

X nomanfiy bo'lgani uchun iqtisodiy sistema A matritsa qanday bo'lganda nomanfiy yechimga ega bo'lishini tekshirishdan iborat.

$X_0 - AX_0$ vektorning nomanfiyligini ta'minlaydigan manfiymas X_0 vektor mavjud bo'lsa, A matritsaga (shu jumladan, modelga) samarali matritsa (model) deyiladi.

Ochiq model uchun A matritsaning samaralilik zaruriy va yetarli shartlari isbotlangan. Ularning biriga ko'ra, ochiq (2) model samarali bo'lishi uchun manfiymas A matritsaning barcha xos qiymatlari (*17 mavzuga qaralsin*) moduli bo'yicha 1 dan kichik bo'lishi yetarli.

Agar (2) modelda nomanfiy A matritsa samarali bo'lsa, u holda ixtiyoriy berilgan nomanfiy Y vektor uchun (2) tenglamalar sistemasi yagona manfiymas X yechimga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, har bir yakuniy mahsulot nomanfiy Y vektoriga, yagona manfiymas ishlab chiqarish hajmi X vektori mos keladi.

A matritsa samarali bo'lsa, nomanfiy $(E-A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, asosiy masala yechimi

$$X = (E-A)^{-1} Y \quad (3)$$

formula bo'yicha topiladi.

2. Sistemaning bevosita xarajat koeffitsiyentlari matritsasi $A=(a_{ik})$ berilgan bo'lsin. Ma'lumki, k -tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun $a^k=(a_{1k}; a_{2k}; \dots; a_{nk})^T$ mahsulotlar zarur. Bu A matritsaning k – ustunidan iborat. O'z navbatida, a^k mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun $a^{k(1)}$ mahsulotlar zarur bo'ladi. $a^{k(1)}$ ustun vektor bo'lib, $a^{k(1)}=(a_{1k}^{(1)}; a_{2k}^{(1)}; \dots; a_{nk}^{(1)})^T$ va $a^{k(1)}=Aa^k$.

Vektor – matritsali tenglamada $a^{k(1)}$ vektorning koordinatalari k -mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun birinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsiyentlari deyiladi.

$a^{k(1)}(k \in \{1; 2; \dots; n\})$ ustun vektorlardan tuzilgan $A^{(1)}$ matritsa birinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsiyentlari matritsasi deyiladi va

$$A^{(1)}=(a^{1(1)}; a^{2(1)}; \dots; a^{k(1)}; \dots; a^{n(1)})=(Aa^1; Aa^2; \dots; Aa^k; \dots; Aa^n)=AA=A^2.$$

Shunday qilib, $A^{(1)}=AA=A^2$.

Birinchi tartibli bilvosita xarajatni ta'minlash uchun zarur xarajatlar ikkinchi tartibli bilvosita xarajatlar deyiladi va $a^{k(2)}=Aa^{k(1)}$. $A^2=AA^{(1)}$ – ikkinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsiyentlari matritsasi deyiladi.

Yuqoridagi mulohazalarni davom ettirib, j -tartibli bilvosita xarajat koeffitsiyentlari va ularning matritsasini kiritish mumkin, ya'ni

$$a^{k(j)}=A^j a^k \text{ va } A^{(j)}=AA^{(j-1)}.$$

Bevosita va barcha tartibli bilvosita xarajat koeffitsiyentlari yig'indisi

$$c_{ik} = a_{ik} + a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)} + \dots + a_{ik}^{(j)} + \dots$$

to'la xarajat koeffitsientlari deyiladi.

$C=(c_{ik})$ – matritsa, mos ravishda, to'liq moddiy xarajat koeffitsientlari matritsasi deyilib,

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(j)} + \dots$$

$\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{E} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} + \dots + \mathbf{A}^{(j)} + \dots$ matritsa ham o'z navbatida, to'la xarajat koeffitsiyentlari matritsasi deyiladi. \mathbf{A} matritsa samarali bo'lsa, matritsali qator yaqinlashuvchidir. \mathbf{B} matritsa elementlari k -mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun i -mahsulot sarflaridan tashqari, har bir tarmoqning bir birlik yakuniy mahsulotini vujudga keltirish xarajatlarini ham o'z ichiga oladi. $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ tenglikni isbotlash qiyin emas. Natijada (3) formula $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$ ko'rinishni oladi.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

Ikki tarmoqdan iborat iqtisodiy sistemaning bevosita xarajat koeffitsientlari matritsasi \mathbf{A} va yakuniy mahsulot vektori \mathbf{Y} berilgan. Sistemaning yalpi mahsulot hajmi vektori \mathbf{X} ni toping.

Dastlab:

- sistemaning tarmoqlararo moddiy balans modelini tuzing;
- \mathbf{B} matritsani matritsali qatorni kesish usulida taqriban quring va \mathbf{X} ni toping;
- \mathbf{B} matritsani teskari matritsa topish Jordan usulida quring va \mathbf{X} ni toping;
- Masalani programma yordamida kompyuterda eching.

$$1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,24 \\ 0,12 & 0,08 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,18 \\ 0,14 & 0,06 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,2 \\ 0,15 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,1 \\ 0,25 & 0,16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,18 \\ 0,1 & 0,21 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

5 CLS

10 PRINT "MM-70 Karimova Madina"

20 KEY OFF

30 PRINT "@ copyright by Karimova Madina"

40 LOCATE 3, 11

50 PRINT "matritsa ustida amallar va ularning iqtisodiyotda qo'llanishi"

60 LOCATE 4, 20

65 PRINT "balans modelini tuzish"

66 LOCATE 5, 21

70 PRINT "Ixtiyoriy tugmani bosing"

80 A\$= INKEY\$: IF A\$ = " " THEN 80

100 DIM A(2, 2), AA(2, 2), Y(2)

105 PRINT "A matritsani kiriting"

110 FOR I = 1 TO 2

```

115 C = 0
120 FOR J = 1 TO 2
122 PRINT "A"; I; J
125 INPUT A(I, J)
130 C = C + A(I, J)
135 PRINT "E-A matritsani quring"
140 IF I = J THEN A(I, J) = 1 - A(I, J) ELSE A(I, J) = 0 - A(I, J)
160 NEXT J
170 ' matritsani samaradorligini tekshiring,
180 IF ABS © >= 1 THEN 480
190 NEXT I
200 PRINT "Y vektorni kiriting"
210 FOR I = 1 TO 2: PRINT "Y"; I: INPUT Y(I): NEXT I
220 ' teskari matritsa quring
230 D = A(1, 1) * A(2, 2) - A(1, 2) * A(2, 1): IF D = 0 THEN 500
250 AA(1, 1) = A(2, 2): AA(2, 1) = -A(1, 2): AA(1, 2) = -A(2, 1) : AA(2, 2) = A(1, 1)
260 FOR I = 1 TO 2
270 FOR J = 1 TO 2
280 A(I, J) = AA(J, I) / D
300 NEXT J, I
330 ' X yalpi maxsulot xajmini xisoblang
360 FOR I = 1 TO 2
380 S = 0
400 FOR J = 1 TO 2
410 S = S + A(I, J) * Y(J)
420 NEXT J: X(I) = S
430 NEXT I
440 PRINT "yalpi maxsulot xajmi"
450 FOR I = 1 TO 2: PRINT "x"; I; "=", X(I): NEXT I
470 GOTO 510
480 PRINT "matritsa samarali emas"
490 GOTO 510
500 PRINT "determinant nolga teng"
510 LOCATE 22, 30: PRINT "see you"
520 END

```

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (56-60 betlar)
- [5] (10-18 betlar)
- [6] (64-69 betlar)
- [7] (59-63 betlar)

12- MA'RUZA. CHIZIQLI FAZO. YEVKLID FAZO

Reja:

1.Chiziqli fazo va uning o'lchovi. n-o'lchovli fazoda bazis va koordinatalar.

2.Yevklid fazo. Bazisni almashtirish. Ortogonal matritsa.

1. Elementlari vektorlar deb ataluvchi L to'plam berilgan bo'lsin. Agar L to'plamda:

- 1) ixtiyoriy $x \in L$ va $y \in L$ vektorlar juftiga x va y vektorlarning yig'indisi deb ataluvchi yagona $z = x + y \in L$ vektorni mos qo'yuvchi;
- 2) $x \in L$ vektorga va λ haqiqiy songa x vektorning λ songa ko'paytmasi deb ataluvchi yagona $z = \lambda x \in L$ vektorni mos qo'yuvchi qonuniyat o'rnatilgan bo'lsa, u holda L vektorlar to'plamiga *haqiqiy chiziqli fazo* deyiladi.

Ta'rifda keltirilgan vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amallari quyidagi aksiomalarga bo'ysunadi.

- a) $x + y = y + x$,
- b) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- c) $x + \theta = x$,
- d) $x + (-x) = \theta$,
- e) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
- f) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
- g) $(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$,
- h) $1x = x$,

bu yerda x, y va z L to'plamga tegishli ixtiyoriy vektorlar bo'lsa λ va μ esa ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

Elementlari L chiziqli fazoda bo'lgani kabi qo'shish va songa ko'paytirish amallari vositasida chiziqli fazoni tashkil etuvchi

L to'plamning har qanday qism osti to'plamiga L chiziqli fazoning *qism osti fazosi* deyiladi.

Chiziqli fazoning qism osti fazosiga misollar keltiramiz:

- 1) Ikki o'lchovli haqiqiy arifmetik R_2 fazo chiziqli fazo sifatida o'zining quyidagi qism osti fazolariga ega:
 - a) R_2 fazoning o'zi;
 - b) koordinatalar markazi, ya'ni yagona ikki o'lchovli nol vektordan iborat to'plam (nol fazo);
 - c) koordinatalar markazidan o'tuvchi har qanday to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlar to'plami fazosi;
- 2) R_3 fazoning koordinatalar markazidan o'tuvchi tekislikda yotgan vektorlar to'plami R_3 fazoning qism osti fazosini tashkil etadi,
- 3) R_n fazoda mumkin bo'lgan barcha $(x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; 0)$ haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to'plami fazosi R_n fazoning qism osti fazosidir va hokazo.

L chiziqli fazoda mavjud har qanday chiziqli erkli vektorlar sistemalarining tarkibidagi vektorlar soni n ga teng va undan oshmasa, u holda chiziqli fazo n – o'lchovli deyiladi va L^n yozuv bilan belgilanadi. n – soniga esa *chiziqli fazoning o'lchovi* deyiladi.

n – o'lchovli *chiziqli fazoning bazisi* deb, har qanday chiziqli erkli n ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi.

L^n chiziqli fazoning har bir x vektorini bazis vektorlarining yagona ko'rinishdagi chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida tasvirlash mumkin.

Agar e_1, e_2, \dots, e_n – L^n chiziqli fazoning ixtiyoriy tanlangan bazislaridan biri bo'lsa, u holda L^n fazoning har bir x vektori uchun yagona $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ chiziqli yoyilma o'rinni bo'ladi. x_1, x_2, \dots, x_n sonlarga x vektorining e_1, e_2, \dots, e_n bazisdagi koordinatalari deyiladi va x vektor $x(x_1; x_2; \dots; x_n)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar L^n chiziqli fazoda boshqa bazis tanlansa, unda x vektorning koordinatalari ham mos ravishda o'zgaradi.

Masala: $a_1(1; -1; 2; -3)$, $a_2(-2; 1; -1; 4)$, $a_3(-3; 1; 0; 5)$ va $a_4(3; -2; 3; -7)$

vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan birini va uning o'lchovini aniqlang.

Masala chiziqli bog'liq vektorlar sistemasining bazisi va rangini topish usulida (11-mavzuga qaralsin) yechiladi.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$ vektor tenglama umumiy echimi Gauss-Jordan usulida quriladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 & : & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & : & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & : & 0 \\ -3 & 4 & 5 & -7 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 & : & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & : & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

qurilgan umumiy yechimning bazis x_1 va x_4 noma'lumlari oldidagi vektor – koeffitsiyentlardan iborat a_1 va a_4 qism osti sistema berilgan vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan biri bo'lib, fazo o'lchovi 2 ga teng.

2. Agar haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, ya'ni fazoning ixtiyoriy x va y vektorlar juftiga yagona (x, y) haqiqiy son mos qo'yilsa, u holda haqiqiy chiziqli fazoga *Yevklid fazo* deyiladi. Ta'rifda keltirilgan moslik har qanday x, y, z vektorlar va λ son uchun quyidagi aksiomalarga bo'ysunadi:

- a) $(x, y) = (y, x)$
- b) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
- c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
- d) $(x, x) \geq 0$

Skalyar ko'paytma aniqlangan haqiqiy chiziqli fazo Yevklid fazoda metrika haqida gapirish mumkin. Biz oldingi mavzularda ta'riflagan vektor uzunligi (moduli yoki normasi), vektorni birlik vektorga keltirish, vektorlar orasidagi burchak, ortogonallik va ortonormallik tushunchalari, Koshi-Bunyakovskiy va Minkovskiy (yoki uchburchak) tengsizliklari Yevklid fazoga xosdir.

n -o'lchovli Yevklid fazoda n ta vektorlarning ortonormallangan bazisi mavjud.

Vektorlari ortonormallangan sistemani tashkil etgan bazisga *ortonormallangan bazis* deyiladi.

Ortonormallangan bazisda berilgan ikki $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $\mathbf{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

n – o'lchovli chiziqli L^n fazoda ikki: dastlabki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ bazis va yangi $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_n'$ bazislar tanlangan bo'lsin. Agar yangi bazis vektorlari dastlabki bazis vektorlari orqali quyidagi formulalar bo'yicha ifodalanishi aniqlangan bo'lsa, ya'ni

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = P_{11}\mathbf{e}_1 + P_{12}\mathbf{e}_2 + \dots + P_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_2' = P_{21}\mathbf{e}_1 + P_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + P_{2n}\mathbf{e}_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathbf{e}_n' = P_{n1}\mathbf{e}_1 + P_{n2}\mathbf{e}_2 + \dots + P_{nn}\mathbf{e}_n, \end{cases} \quad (1)$$

u holda \mathbf{x} vektorning dastlabki bazisdagi koordinatalari uning yangi bazisdagi koordinatalari orqali quyidagi formulalar bo'yicha ifodalaniladi:

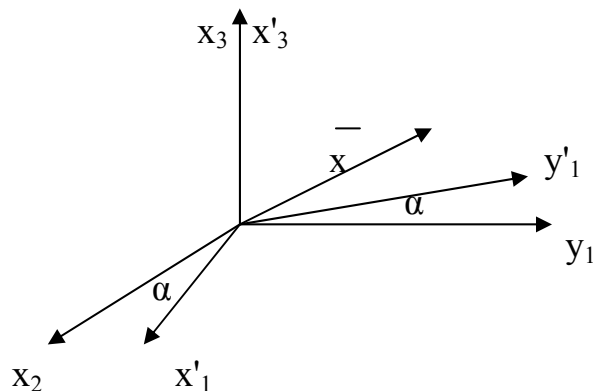
$$\begin{cases} x_1 = P_{11}x_1' + P_{21}x_2' + \dots + P_{n1}x_n' \\ x_2 = P_{12}x_1' + P_{22}x_2' + \dots + P_{n2}x_n' \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = P_{1n}x_1' + P_{2n}x_2' + \dots + P_{nn}x_n', \end{cases} \quad (2)$$

yoki matritsa shaklida $\mathbf{x} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}'$, bu erda \mathbf{P}^T (1) sistema koeffitsiyentlar matritsasining transponirlangan matritsasi:

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1n} & P_{2n} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Ushbu matritsaga *bazisdan yangi bazisga o'tish matritsasi* deyiladi.

Masala. Uch o'lchovli fazoda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisdan ikkinchi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini OZ applikata o'qi atrofida α burchakga burishdan hosil bo'lgan $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ bazisga o'tish matritsasini tuzing.



Yangi bazis vektorlarining dastlabki bazis vektorlari orqali ifodalanishi quyidagi sistema ko'rinishidan iborat:

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j} + 0 \vec{k} \\ \vec{j}' = -\sin\alpha \vec{i} + \cos\alpha \vec{j} + 0 \vec{k} \\ \vec{k}' = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + 1 \vec{k} \end{cases}$$

Dastlabki bazisdan yangi bazisga o'tish matritsasi

$$\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy vektorning dastlabki koordinatalarini uning yangi koordinatalari orqali ifodalovchi (2) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_1 = \cos\alpha x_1' - \sin\alpha x_2' \\ x_2 = \sin\alpha x_1' + \cos\alpha x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

Agar haqiqiy elementli \mathbf{P} matritsaning transponirlangan \mathbf{P}^T matritsasi uning teskari \mathbf{P}^{-1} matritsasiga teng bo'lsa, ya'ni $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$, u holda \mathbf{P} *ortogonal matritsa* deyiladi.

Ta'rifdan \mathbf{P} ortogonal matritsa uchun $\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{E}$ tengliklar o'rinli bo'lishi va \mathbf{P} matritsa determinanti 1 yoki -1 ga teng bo'lishini payqash qiyin emas.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini (umuman, ortogonal koordinatalar sistemasini) har qanday almashtirganda o'tish matritsasi rolini ortogonal matritsa o'taydi.

Ko'rilgan masalada \mathbf{P} matritsaning ortogonalligini ($\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$) tekshirib ko'rish mumkin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli fazoning qism osti fazosi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
3. n -o'lchovli chiziqli fazo deb, qanday chiziqli fazoga aytiladi?
4. Chiziqli fazo o'lchovi deb nimaga aytiladi?
5. n -o'lchovli chiziqli fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
6. Har qanday $x \in L^n$ vektorni fazoning bazisi orqali yoyish mumkinmi?
7. Vektorning biror-bir bazisdagi koordinatalari deb nimaga aytiladi?
8. Qanday chiziqli fazoga Yevklid fazo deyiladi?
9. n -o'lchovli Yevklid fazoning ortonormallangan bazisi deb nimaga aytiladi?
10. L^n fazoda bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi qanday tuziladi?
11. Qanday haqiqiy elementli matritsaga ortogonal matritsa deyiladi? Ortogonal matritsa determinanti haqida nima deya olasiz?

Mavzuning tayanch iboralari.

1. Chiziqli fazo.
2. Chiziqli fazo qism osti fazosi.
3. Chiziqli fazo bazisi.
4. Chiziqli fazo o'lchovi.
5. Vektorning bazisdagi koordinatalari.
6. Yevklid fazo.
7. Ortonormallangan bazis.
8. O'tish matritsasi.
9. Ortogonal matritsa.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

12.1. Quyidagi vektorlar sistemalariga tortilgan chiziqli qism osti fazosining bazislaridan birini, ortonormallangan bazisini va o'lchamini toping:

a) $a_1(0; 1; -3)$, $a_2(3; 5; 0)$, $a_3(1; 2; -1)$;

b) $a_1(1; 0; 1; 0)$, $a_2(0; 1; 1; 0)$, $a_3(0; 1; 0; 1)$, $a_4(1; 0; 0; 1)$.

12.2. a) $x(2; -1)$ vektor e_1, e_2 bazisda berilgan. Vektorning $e_1=e_1-3e_2$, $e_2=2e_1+e_2$ bazisdagi koordinatalarini toping.

b) $x(3; -2; 4)$ vektor e_1, e_2, e_3 bazisda berilgan. Vektorning $e_1=e_1+2e_2-3e_3$, $e_2=e_1+e_2+e_3$, $e_3=2e_1-e_2+2e_3$ bazisdagi koordinatalarini toping.

12.3. Quyidagi matritsalaridan ortogonallarini ajrating:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0,5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

12.4. Quyida berilgan ikki vektorlar sistemalaridan har biri bazis bo'la olishini isbotlang. Ushbu bazislarda berilgan aynan bir vektorning koordinatalari orasida munosabatlarni o'rnating:

a) $\mathbf{e}_1(1; 2)$, $\mathbf{e}_2(1; 1)$, $\mathbf{e}_1(1; -1)$, $\mathbf{e}_2(3; 4)$;

b) $\mathbf{e}_1(2; 1; -1)$, $\mathbf{e}_2(3; 1; 2)$, $\mathbf{e}_3(1; 0; 4)$, $\mathbf{e}_1(1; 1; -1)$, $\mathbf{e}_2(2; 3; -2)$, $\mathbf{e}_3(3; 4; -4)$.

12.5. \mathbf{R}_3 da \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} bazisdan fazoni α ordinata o'qi atrofida α burchakka burgandagi bazisga o'tish matritsasini quring.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (68-85 betlar)
- [6] (102-114 betlar)
- [7] (78-100 betlar)
- [13] (103-111 betlar)

13- MA'RUZA. CHIZIQLI OPERATORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

Reja:

1. Chiziqli operator va uning matritsasi.
2. Chiziqli operatorlar ustida amallar.
3. Chiziqli operator xos vektori va xos qiymati.
4. Chiziqli operator matritsasini diagonal ko'rinishga keltirish.

1. L chiziqli fazoni va uning A almashtirishini yoki operatorini, ya'ni har bir $x \in L$ vektorga shu L fazoning biror – bir y vektorini mos qo'yuvchi qonunni qaraymiz. Ushbu qonun $y = Ax$ ko'rinishida yoziladi.

L fazoning har qanday z va z' vektorlari va ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun $A(z+z') = Az + Az'$; $A(\lambda z) = \lambda Az$ tengliklar o'rinli A almashtirishi chiziqli fazoning chiziqli almashtirishi (yoki operatori) deyiladi.

Agar L fazo n – o'lchovli bo'lib, unda e_1, e_2, \dots, e_n bazis tanlangan bo'lsa, u holda x vektor koordinatalari va uning aksi y vektor koordinatalari orasidagi bog'liqlik quyidagi sistema ko'rinishida aniqlanadi

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

yoki matritsa ko'rinishida $Y = AX$, bu erda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

i – ustuni tanlangan Ae_i vektorning koordinatalaridan tuzilgan A matritsaga chiziqli almashtirish matritsasi deyiladi.

Bazis almashtirilib, dastlabki bazisdan yangi bazisga P^T o'tish matritsa yordamida o'tilsa, chiziqli almashtirishning dastlabki bazisdagi A matritsasiga yangi bazisda $(P^T)^{-1}AP^T$ matritsa mos keladi. A va $(P^T)^{-1}AP^T$ matritsalar o'zaro o'xshash matritsalar deyiladi. A matritsadan $(P^T)^{-1}AP^T$ matritsaga o'tish A matritsani o'xshashlik almashtirishi deyiladi.

Shunday qilib, ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matritsalar mos keladi.

2. Chiziqli almashtirish ustida bajariladigan amallarni ko'rib chiqamiz:

a) **Almashtirishlarni qo'shish.** Ikki chiziqli almashtirishlar matritsa ko'rinishida berilgan bo'lsin: $Y=AX$, $Z=BX$. Chiziqli almashtirishlarning yig'indisi deb, quyidagicha aniqlanadigan C almashtirishga aytiladi.

$$Y + Z = (A+B)X = CX.$$

b) **Almashtirishni songa ko'paytirish.** Matritsa ko'rinishida $Y=AX$ chiziqli almashtirish va ixtiyoriy λ haqiqiy son berilgan bo'lsin. Berilgan almashtirishni λ songa ko'paytmasi deb, quyidagi B almashtirishga aytiladi: $Z = (\lambda A)X = BX$.

c) **Almashtirishlarni ko'paytirish.** Ikki ketma-ket chiziqli almashtirishlar $Y = AX$ va $Z = BY$ berilgan bo'lsin. Y uchun ifodani birinchi formuladan ikkinchisiga qo'ysak, $Y = AX$ almashtirishning $Z = BY$ almashtirishga ko'paytmasi deb ataladigan quyidagi F almashtirishni olamiz:

$$Z = B(AX) = (BA)X = FX$$

d) **Teskari almashtirish.** Matritsa shaklida $Y=AX$ chiziqli almashtirish berilgan bo'lib, A - kvadrat maxsusmas matritsa ($\det A \neq 0$) bo'lsin. Tenglama ikkala qismini chapdan teskari A^{-1} matritsaga ko'paytirib, $Y=AX$ chiziqli almashtirishning teskari almashtirishi deb ataluvchi $X=A^{-1}Y$ chiziqli almashtirishni olamiz.

3. Agar shunday bir λ son tanlash mumkin bo'lsaki, bunda $Ax=\lambda x$ tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas x vektorga A *chiziqli almashtirishning xos vektori* deyiladi. λ sonning o'ziga esa A chiziqli almashtirishning x xos vektoriga mos keluvchi *xos qiymati* deyiladi.

Xos vektorlar quyidagi xossalarga ega:

1^x. har bir xos vektorga yagona xos qiymat mos keladi;

2^x. Agar x_1, x_2 – A chiziqli almashtirishning ayni bir λ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlari bo'lsa, u holda ularning yig'indisi x_1+x_2 vektor ham A chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektori bo'ladi.

3^x. Agar x – A chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos xos vektori bo'lsa, x ga kollinear har qanday kx vektor ham A chiziqli almashtirishning o'sha λ xos qiymatiga mos xos vektori bo'ladi.

Agar L^n fazoda bazis tanlangan bo'lsa, $Ax = \lambda x$ tenglikni matritsa shaklida yozish mumkin: $AX = \lambda X$.

Tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas ustun A matritsaning λ xos qiymatiga *mos xos vektori* deyiladi.

$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda EX \Leftrightarrow (A-\lambda E)X = 0$ bo'lib, ohirgi tenglik koordinatalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Xos vektorlarni qurish uchun sistemaning nolmas yechimlarini topish zarur. n ta noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimlarga fakatgina sistema determinanti nolga teng bo'lgandagina ega bo'ladi, ya'ni

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ yoki}$$

$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, bu yerda $a_n = (-1)^n$, $a_0 = \det A$.

Ohirgi yozilgan tenglamalar A matritsaning xarakteristik tenglamalari, uning ildizlari esa xarakteristik sonlari yoki A matritsaning xos qiymatlari deyiladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Xarakteristik tenglama tuzamiz va uni yechib, A matritsaning xos qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1; 6\}$$

$\lambda_1 = 1$ xos qiymatga mos xos vektorlardan birini quramiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \text{ ya'ni } X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$ xos qiymatga mos xos vektorlardan biri esa:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matritsaning xarakteristik ko'phadi bazis tanlanishiga bog'liq emas. Ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matritsalar mos kelgani uchun, o'xshash matritsalarining xarakteristik ko'phadlari tengdir. Agar X_1, X_2, \dots, X_k xos vektorlar juft-jufti bilan turli xos qiymatlarga tegishli bo'lsa, ular chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.

4. A matritsa berilgan e_1, e_2, \dots, e_n bazis vektorlar matritsaning xos vektorlaridan iborat bo'lgandagina A matritsa diagonal ko'rinishda bo'ladi.

Agar o'xshash A va $K^{-1}AK$ matritsalar berilgan bo'lib, $D = K^{-1}AK$ matritsa diagonal matritsa bo'lsa, u holda K matritsa A matritsani diagonal ko'rinishga keltiradi deyiladi. D diagonal matritsaning bosh diagonal A matritsaning xos qiymatlaridan, K matritsaning i - ustuni λ_i xos qiymatlarga tegishli xos vektor mos koordinatalaridan tuziladi.

Berilgan matritsani diagonal matritsaga keltiruvchi K matritsa quyidagicha quriladi:

- 1) A matritsaning barcha xos qiymatlari topiladi;
- 2) Har bir λ_i xos qiymatga mos $(A - \lambda_i E) \cdot X = 0$ bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari – xos vektorlari tuziladi;
- 3) i – ustuni λ_i ga tegishli fundamental yechimning mos koordinatalaridan iborat K matritsa quriladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi K matritsani quring.

Yuqorida matritsaning xos qiymatlari $\lambda \in \{1; 6\}$ va ularga mos xos

vektorlari $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tuzilgan edi. Demak, K matritsa $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ko'rinishda yozilishi mumkin. $K^{-1}AK = D$ ekanligini tekshirib ko'ramiz:

$$K^{-1} = -1/5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$K^{-1}A = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 18/5 & 12/5 \end{pmatrix}$$

$$D = K^{-1}AK = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 18/5 & 12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Har qanday x va y vektorlar uchun $(x, Ay) = (y, Ax)$ tenglik o'rinli A chiziqli almashtirishga *simmetrik almashtirish* deyiladi.

A chiziqli almashtirish simmetrik bo'lishi uchun ortonormallangan bazisda uning matritsasining simmetrik bo'lishi $((a_{ik}) = (a_{ki}))$ zarur va yetarlidir.

Haqiqiy elementli simmetrik matritsa quyidagi xossalarga ega:

- 1^x. Simmetrik matritsaning barcha xos qiymatlari haqiqiy;
 - 2^x. Simmetrik matritsaning turli xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari ortogonal;
 - 3^x. Agar A matritsa haqiqiy elementli simmetrik matritsa bo'lib, B matritsa ortogonal bo'lsa, u holda o'xshash $B^{-1}AB$ matritsa simmetrik va haqiqiydir.
- Har qanday haqiqiy simmetrik A matritsani Q ortogonal matritsa yordamida diagonal ko'rinishga keltirish mumkin.

A simmetrik matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi Q ortogonal matritsa quyidagicha quriladi:

- 1) A matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi K matritsa quriladi;
- 2) K matritsaning ustunlari ortogonallashtirish jarayoniga tortiladi va har biri birlik vektorga keltiriladi;
- 3) Ustunlari ortonormallangan vektorlar sistemasini tashkil etgan Q matritsa quriladi.

O'zini – o'zi tekshirish uchun savollar:

1. Chiziqli fazoning chiziqli almashtirishi yoki operatori deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o'xshashlik almashtirishi deganda nimani tushunasiz?
3. Chiziqli almashtirish ustida bajariladigan qanday amallarni bilasiz?
4. Chiziqli almashtirishning xos vektori va xos qiymati deb nimaga aytiladi?

5. Xos vektorlarning qanday xossalari bilasiz?
6. A matritsa xarakteristik tenglamasini yozing.
7. Matritsaning xarakteristik ko'phadi bazis tanlanishiga bogliqmi?
8. Qanday bazisda matritsa diagonal ko'rinishga ega bo'ladi?
9. Berilgan matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi matritsa qanday quriladi?
10. Simmetrik chiziqli almashtirish deb, qanday almashtirishga aytiladi?
11. Har qanday simmetrik matritsani diagonal ko'rinishga keltirish mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa, qanday qilib?

Mavzuning tayanch iboralari.

1. Chiziqli almashtirish yoki operator.
2. Chiziqli almashtirish matritsasi.
3. O'xshash matritsalar.
4. Almashtirishlarni qo'shish.
5. Almashtirishni songa ko'paytirish.
6. Almashtirishlarni ko'paytirish.
7. Teskari almashtirish.
8. Chiziqli almashtirish xos vektori.
9. Chiziqli almashtirish xos qiymati.
10. Xarakteristik tenglama.
11. Xarakteristik ko'phad.
12. Diagonal matritsa.
13. Simmetrik chiziqli almashtirish.
14. Simmetrik matritsa.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

13.1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining abssissa o'qiga nisbatan tekislik simmetriyasi koordinata o'qlarining birlik vektorlari bazisida chiziqli almashtirish bo'la olishini isbotlang va almashtirish matritsasini quring.

13.2. Tekislikdagi $a_1(1; 1)$, $a_2(2; 1)$ vektorlarni mos ravishda $b_1(1; 2)$, $b_2(1; 3)$ vektorlarga o'tkazadigan yagona chiziqli almashtirish mavjudligini isbotlang. Almashtirish matritsasini barcha vektorlar berilgan bazisda toping.

13.3. A chiziqli almashtirish $a_1(1; 2)$, $a_2(-1; 1)$ bazisda $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Matritsaga ega. Almashtirishning $b_1(1; -2)$, $b_2(3; -1)$ bazisdagi matritsani toping.

13.4. A chiziqli almashtirish e_1, e_2, e_3 bazisda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ matritsaga ega. Almashtirishning $e_1=2e_1+3e_2-e_3$, $e_2=e_1+2e_2+3e_3$, $e_3=4e_1+7e_2+6e_3$ bazisdagi matritsani toping.

13.5. Ikki chiziqli almashtirishlar berilgan:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 - z_2 \\ y_2 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases} \quad x_1, x_2 \text{ larni } z_1, z_2 \text{ orqali ifodalovchi chiziqli} \\ \text{almashtirishni toping.}$$

13.6.
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 + y_3 \\ x_3 = y_1 - 3y_2 - y_3 \end{cases}$$
 almashtirishning teskari chiziqli almashtirishini toping.

13.7. R_2 va R_3 fazoning biror-bir bazisida berilgan A chiziqli almashtirishning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

13.8. Quyidagi matritsalarini diagonal ko'rinishga keltiruvchi o'tish matritsalarini quring:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (68-85 betlar)
- [6] (102-114 betlar)
- [7] (78-100 betlar)
- [13] (103-111 betlar)

14- MA'RUZA. KVADRATIK SHAKLLAR VA ULARNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH

Reja:

1. Musbat matritsalar. Ularning xos qiymatlari va xos vektorlarining xossalari.

2. Kvadratik shakllar va ularni kanonik ko'rinishga keltirish.

1. Har bir koordinatasi musbat vektorga musbat vektor deyilsa, har bir elementi musbat sonlardan iborat matritsaga esa musbat matritsa deyiladi.

A musbat matritsa xos qiymatlari va xos vektorlari quyidagi xossalarga ega:

1) **A** matritsaning shunday bir $\lambda^* > 0$ xos qiymati mavjudki, uning har qanday λ xos qiymatlari uchun $\lambda^* > |\lambda|$ munosabatlar o'rinli;

2) Har qanday $\mu > \lambda^*$ uchun $\mu E - A$ matritsa maxsusmas va $(\mu E - A)^{-1}$ matritsa musbat ;

3) λ^* xos qiymatga tegishli \mathbf{x}^* xos vektor musbat;

4) \mathbf{x}^* xos vektordan tashqari koordinatalari nomanfiy xos vektorlar mavjud emas.

2. n ta x_1, x_2, \dots, x_n noma'lumlarning ikkinchi darajali bir jinsli

[illegible]

ko'phadiga noma'lumlarning kvadratik shakli deyiladi. Bu yerda,

$a_{ik} = a_{ki}$ ($i \neq k$, $i, k = \{1, 2, \dots, n\}$). (1) kvadratik shakl koeffitsiyentlaridan quyidagi simmetrik A matritsani va noma'lumlar satr – matritsasini tuzamiz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Kvadratik shakl matritsa ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$\varphi(X) = X A X^t.$$

Misol. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ kvadratik shakl matritsasi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Agar kvadratik shakl $(x_1, x_2, \dots, x_n) = X$ noma'lumlari $X = S Y$ maxsusmas chiziqli almashtirish vositasida yangi $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ noma'lumlar bilan almashtirilsa, u holda uning ko'rinishi yangi y_1, y_2, \dots, y_n noma'lumlarda

$$\varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y (S^t A S) Y^t$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda, $S^t A S$ – o'xshash simmetrik matritsa.

(1) kvadratik shakl rangi deb, A matritsa rangiga aytiladi. Kvadratik shakl rangi uning noma'lumlari chiziqli maxsusmas almashtirilganda o'zgarmaydi.

Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish deganda uning ko'rinishini

$$\varphi_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (2)$$

shaklga keltirish tushuniladi.

(2) kanonik ko'rinishdagi kvadratik shakl rangi noldan farqli λ_i lar soniga teng.

A matritsa haqiqiy elementli simmetrik matritsa bo'lgani uchun (1) kvadratik shaklni (2) kanonik ko'rinishga aylantirish masalasi simmetrik chiziqli almashtirish matritsasini diagonal ko'rinishga aylantirish masalasiga keltiriladi.

Har bir kvadratik shakl uchun uning noma'lumlarini shunday bir chiziqli maxsusmas $X = Q Y$ almashtirish tanlash mumkinki, bu yerda Q – ortogonal matritsa, (1) ko'rinishdagi kvadratik shakl (2) ko'rinishni oladi. $Q^t A Q$ diagonal matritsa bo'lib, (2) kanonik ko'rinishdagi kvadratik shakl matritsasidir.

A matritsa xarakteristik tenglamasining ildizlari (1) kvadratik shakl xarakteristik sonlari deyilsa, xarakteristik sonlarga mos xos vektorlar yo'nalishlari kvadratik shaklning bosh yo'nalishlari deyiladi.

Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish qoidasi ikkinchi tartibli egri chiziqlar va sirlarni tekshirishda qo'llaniladi.

Masala. Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltiruvchi ortogonal almashtirishni quring va kanonik ko'rinishni yozing:

$$\varphi(x_1; x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Xarakteristik tenglama tuzamiz va uning ildizlari –xarakteristik sonlarni aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \{ 1; 6 \}.$$

Kvadratlik shaklning kanonik ko'rinishi: $\varphi_1 = y_1^2 + 6y_2^2$.
 $\lambda_1=1$ xos qiymatga mos birlik xos vektor $\mathbf{e}_1' (2/\sqrt{5} , 1/\sqrt{5})$;
 $\lambda_2=6$ xos qiymatga mos birlik xos vektor $\mathbf{e}_2' (-1/\sqrt{5} , 2/\sqrt{5})$.
 O'tish matritsasi quyidagi ortogonal matritsadan iborat:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Agar har bir nolmas \mathbf{x} vektor uchun $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ ($\varphi < 0$) bo'lsa, $\varphi(\mathbf{x})$ kvadratlik shakl musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi.
 $\varphi(\mathbf{x})$ kvadratlik shakl musbat aniqlangan bo'lsa, uning qarama-qarshisi $-\varphi(\mathbf{x})$ shakl manfiy aniqlangan bo'ladi.

Kvadratlik shaklning barcha xos qiymatlari musbat (manfiy) bo'lgandagina kvadratlik shakl musbat (manfiy) aniqlangan bo'ladi.

$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ik})$ matritsaning burchak yoki bosh minorlarini quramiz:

$$\Delta_1 = \mathbf{a}_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = | \mathbf{a}_{ik} |.$$

\mathbf{A} matritsa ko'rinishi va bosh minorlar ishoralari bo'yicha kvadratlik shaklning musbat (manfiy) aniqlanganligi yoki aniqmasligi haqida xulosa yasash mumkin.

Kvadratlik shakl matritsasi bosh minorlari har birining musbat bo'lishi, uning musbat aniqlanishi uchun zarur va yetarli.

Toq tartibli bosh minorlarning har biri manfiy bo'lib, juft tartibli bosh minorlar har birining musbat bo'lishi, kvadratlik shaklning manfiy aniqlanishi uchun zarur va yetarli.

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Musbat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
2. Musbat matritsa xos qiymat va xos vektorlarining qanday xossalari bilasiz?
3. n ta noma'lumlarning kvadratlik shakli deb qanday ko'phadga aytiladi?
4. Kvadratlik shakl matritsasi qanday tuziladi?
5. Kvadratlik shaklni matritsa ko'rinishida yozish mumkinmi va qanday?

6. Kvadratik shaklning kanonik ko'rinishi deb, uning qanday shakliga aytiladi?
7. Kvadratik shakl matritsasini diagonal ko'rinishga keltiruvchi ortogonal matritsa mavjudmi va nima uchun?
8. Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish masalasi qanday yechiladi?
9. Kvadratik shaklning xarakteristik sonlari va bosh yo'nalishlari deb nimalarga aytiladi?
10. Kvadratik shakl rangi deb nimaga aytiladi?
11. Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik shakllar deb, qanday shakllarga aytiladi?
12. Kvadratik shakl matritsasining bosh yoki burchak minorlari deb, nimalarga aytiladi?
13. Kvadratik shakl musbat va manfiy aniqlanganlik yetarli shartlari nimalardan iborat?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. Musbat vektor.
2. Musbat matritsa.
3. n ta noma'lumlarning kvadratik shakli.
4. Kvadratik shakl matritsasi.
5. Kvadrat shaklning kanonik ko'rinishi.
6. Kvadratik shakl xarakteristik sonlari va bosh yo'nalishlari.
7. Kvadratik shakl rangi.
8. Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik shakllar.
9. Kvadratik shakl matritsasining bosh yoki burchak minorlari.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

14.1. Kvadratik shakllarni kanonik ko'rinishga keltiruvchi ortogonal almashtirishlarni toping va kanonik shaklni yozing:

- a) $3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$;
- b) $2x_1^2 - 4\sqrt{5}x_1x_2 + 3x_2^2$;
- c) $8x_1x_2$;
- d) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

14.2. Kvadratik shakllarni kanonik ko'rinishga keltiring:

- a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;
- b) $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- c) $5x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
- d) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2$.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

[2] (86-90 betlar)

[6] (115-122 betlar)

[7] (101-104 betlar)

15-MA'RUZA. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI. TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ

Reja:

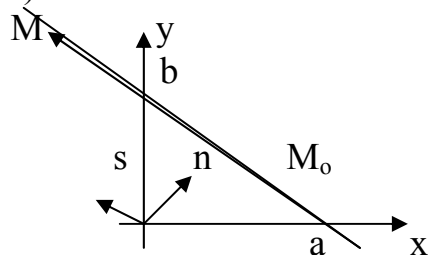
1. Tekislikda to'g'ri chiziqlarning turli ku'rinishdagi tenglamalari.
2. Berilgan bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
3. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa masofa.

1. Tekislikda koordinatalar sistemasini tanlash uning nuqtalarini analitik ifodalash imkonini beradi.

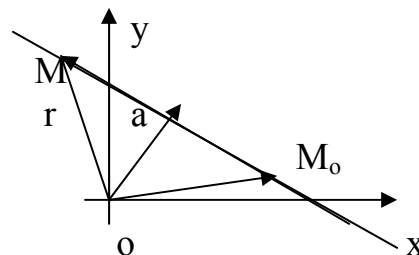
Analitik geometriyada tekislikdagi har qanday chiziq biror-bir umumiy xossaga ega nuqtalar to'plami sifatida qaraladi. Tekislikda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga mos holda qaralayotgan chiziqlarning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari x va y orqali belgilansa, uning barcha nuqtalari uchun umumiy xossa x va y larga nisbatan tenglama ku'rinishida ifodalanadi.

Shunday qilib, chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqta koordinatalarini qanoatlantiruvchi x va y larga nisbatan $F(x, y) = 0$ tenglamaga chiziq tenglamasi deyiladi yoki $F(x, y) = 0$ tenglama chiziqni aniqlaydi deyiladi.

Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lsin. To'g'ri chiziqlarning tekislikdagi tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyatini ushbu to'g'ri chiziqlarning biror-bir $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasi va to'g'ri chiziqqa perpendikulyar nolmas $\mathbf{n}(A; B)$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) vektor yoki to'g'ri chiziqqa parallel nolmas $\mathbf{s}(m; n)$ ($m^2 + n^2 \neq 0$) vektor to'liq aniqlaydi. \mathbf{n} vektor to'g'ri chiziqlarning normal vektori, \mathbf{s} vektor esa yo'naltiruvchi vektori deyiladi (1-rasm).



1 – rasm.



2 – rasm.

Koordinatalar sistemasining boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziqni ohiri to'g'ri chiziqda joylashgan uning yagona \mathbf{a} normal radius vektori birga-bir aniqlaydi (2-rasm).

To'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy $\mathbf{M}(x; y)$ nuqtasi uchun $\mathbf{n}(A; B)$ va $\mathbf{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng: $(\mathbf{n}, \mathbf{M_0M}) = 0$ yoki koordinatalarda $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Tenglamalar nuqtasi va normal vektori bilan berilgan to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $Ax + By + C = 0$, ($A^2 + B^2 \neq 0$) (1) ko'rinishdagi tenglamaga

tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. To'g'ri chiziq umumiy (1) ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) Agar $C = 0$ bo'lsa, $Ax + By = 0$ to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

b) $\mathbf{n} (A; B)$ nolmas vektor (1) ko'rinishdagi to'g'ri chiziqning normal vektoridir.

Agar umumiy tenglamada $ABC \neq 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, (1) tenglama quyidagi ko'rinishga keltiriladi: $x/a + y/b = 1$ (2).

(2) tenglama to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deyiladi.

Agar (1) tenglamada $B \neq 0$ bo'lsa, umumiy tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deb ataluvchi $y = kx + b$ (3)

ko'rinishga keltiriladi, bu yerda, $k = \operatorname{tg} \varphi$ – to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti, φ – to'g'ri chiziq bilan ox absissa o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchak kattaligi va $b = y(0)$ – boshlang'ich ordinata.

To'g'ri chiziqning ixtiyoriy $\mathbf{M}(x; y)$ nuqtasi uchun $\mathbf{s}(m; n)$ va $\mathbf{M}_0\mathbf{M}(x - x_0; y - y_0)$ vektorlar o'zaro kollinear, demak $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = t\mathbf{s}$ (4), bu yerda, t – ixtiyoriy haqiqiy son bo'lib, parametr deyiladi.

(4) tenglama to'g'ri chiziqning vektor parametrli tenglamasi deyiladi va koordinatalarda

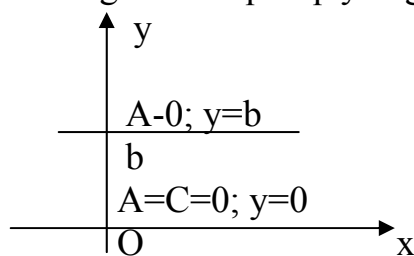
$$x - x_0 = tm,$$

$$y - y_0 = tn$$

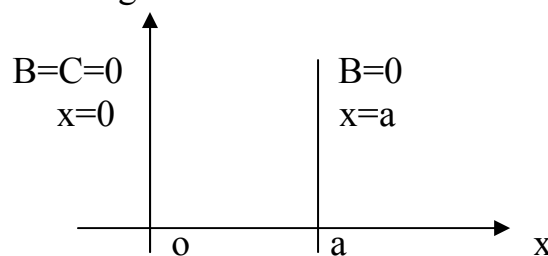
(5) ko'rinishni oladi. (5) tenglamalarga to'g'ri chiziqning parametrli tenglamalari deyiladi.

Agar (5) tenglamalarda t parametr yo'qotilsa, to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataluvchi quyidagi $(x - x_0)/m = (y - y_0)/n$ (6) ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi.

Umumiy (1) ko'rinishdagi tenglamaning turli xususiy hollari va ularga mos to'g'ri chiziqlar quyidagi rasmlarda keltirilgan:



3 – rasm.



4 – rasm.

Agar $|\mathbf{a}| = P$ ($P \geq 0$), $\mathbf{v} = \mathbf{a}/P = (\cos \alpha; \cos \beta)$ – \mathbf{a} normal radius vektorning birlik vektori bo'lib, to'g'ri chiziqning ixtiyoriy

$\mathbf{M}(x; y)$ nuqtasining mos radius vektori $\mathbf{r}(x; y)$ bo'lsa, u holda \mathbf{R} radius vektorning \mathbf{a} yoki \mathbf{v} vektordagi sonli proeksiyasi R ga teng: $P\mathbf{r}_\mathbf{v} \mathbf{r} = R$ yoki $|\mathbf{v}| P\mathbf{r}_\mathbf{v} \mathbf{r} = R$ yoki $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = R$ ($R \geq 0$) (7).

(7) tenglama to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. (7) tenglama koordinatalarda $x \cos \alpha + y \cos \beta = R$ yoki

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = R \quad (R \geq 0) \quad (8) \text{ ko'rinishni oladi.}$$

Bu yerda, α – \mathbf{a} yoki \mathbf{v} vektorning ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak kattaligi. (8) shakldagi tenglama to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

(1) shakldagi tenglamadan (8) shakldagi tenglamaga o'tish uchun umumiy ko'rinishdagi tenglama normallovchi ko'paytuvchi deb ataladigan $\mu = +1 / A^2 + B^2$ songa ko'paytiriladi, bunda + yoki - ishoradan C ozod had ishorasining qarama-qarshisi tanlanadi, aks holda $R = -\mu C \geq 0$ munosabat bajarilmaydi.

Masala. $3x + 4y - 8 = 0$ tenglamani normal ko'rinishga keltiring?

Berilgan umumiy shakldagi tenglama uchun normallovchi ko'paytuvchi $\mu = +1 / 3^2 + 4^2 = 1/5$. Tenglamani $\mu = 1/5$ ga ko'paytiramiz, natijada to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda normal holga keltiriladi:

$$3/5 x + 4/5 y = 8/5.$$

2. Berilgan $M_0 (x_0 ; y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsiyenti k ga teng bo'lgan to'g'ri chiziq $y - y_0 = k (x - x_0)$ tenglama bilan aniqlanadi.

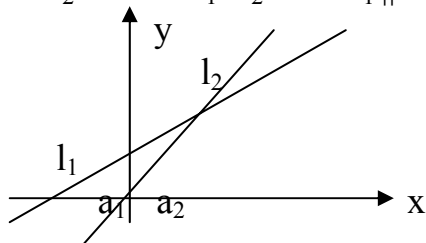
Koordinatalar tekisligida berilgan ikki $M_1 (x_1 ; y_1)$ va $M_2 (x_2 ; y_2)$ ($M_1 \neq M_2$) nuqtalardan o'tuvchi yagona to'g'ri chiziq tenglamasi $x - x_1 / x_2 - x_1 = y - y_1 / y_2 - y_1$ ko'rinishga ega.

Burchak koeffitsiyentli $y = k_1 x + b_1 (l_1)$ va $y = k_2 x + b_2 (l_2)$ tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak kattaligi quyidagi formula yordamida aniqlanadi (5 – rasm):

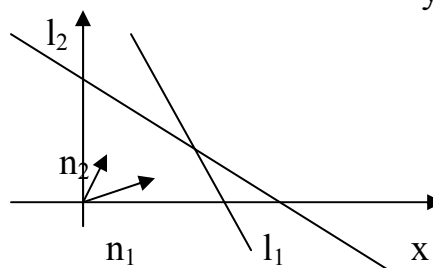
$$\operatorname{tg} \varphi = k_2 - k_1 / 1 + k_1 k_2$$

Ohirgi formuladan burchak koeffitsiyentlar tilida l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallelizm shartlari kelib chiqadi:

$$l_1 \perp l_2 : 1 + k_1 k_2 = 0 \quad l_1 \parallel l_2 : k_1 = k_2.$$



5 – rasm



6 – rasm

Koordinatalar tekisligida umumiy ko'rinishdagi

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 (l_1) \quad \text{va} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 (l_2)$$

tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak kattaligi l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning normal $n_1 (A_1 ; B_1)$ va $n_2 (A_2 ; B_2)$ vektorlari orasidagi burchak kattaligiga teng.

Ushbu tasdiq umumiy shakldagi tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

$$\operatorname{Cos} \varphi = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) / |\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2| = A_1 A_2 + B_1 B_2 / A_1^2 + B_1^2 \quad A_2^2 + B_2^2.$$

A va B koeffitsiyentlar tilida l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallelizm shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$l_1 \perp l_2 : A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \quad l_1 \parallel l_2 : A_1 / A_2 = B_1 / B_2.$$

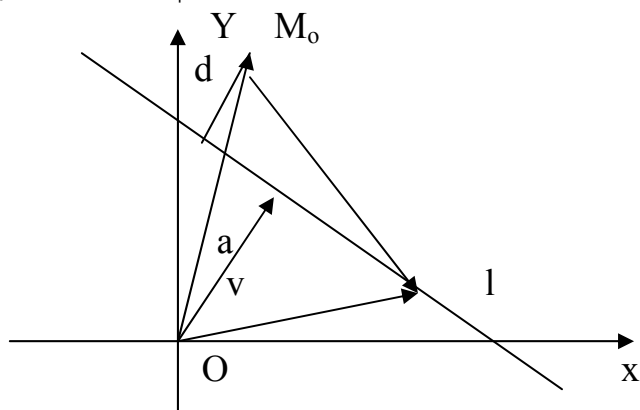
3. Koordinatalar tekisligida $M_0(x_0; y_0)$ nuqta va umumiy $Ax + By + C = 0$ shakldagi tenglamasi bilan l to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Berilgan M_0 nuqtadan berilgan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofa \vec{OM}_0 vektorining \vec{a} yoki \vec{v} vektordagi sonli proeksiyasining absolyut qiymatiga teng (7 – rasm):

$$d = |\text{Pr}_{\vec{v}}(\vec{OM} - \vec{OM}_0)| = |(\vec{OM} - \vec{OM}_0, \vec{v})| = |(\vec{OM}, \vec{v}) - (\vec{OM}_0, \vec{v})|.$$

Yoki $d = |(\vec{OM}_0, \vec{v}) - (\vec{OM}, \vec{v})|$. Vektor shakldagi so'nggi formula $(\vec{OM}, \vec{v}) = R$ ekanligini hisobga olsak, koordinatalarda

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - R| \text{ ko'rinishni oladi.}$$



7 – rasm.

A va B koeffitsiyentlar tilida esa d masofa quyidagi

$$d = |Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{A^2 + B^2} \text{ formula vositasida hisoblanadi.}$$

Masala. $M_0(-4; 1)$ nuqtadan $3x + 4y - 8 = 0$ to'g'ri chiziqqacha masofani toping?

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani hisoblash formulasini qo'llaymiz:

$$d = |3(-4) + 4 \cdot 1 - 8| / \sqrt{3^2 + 4^2} = 16 / 5 = 3,2 \text{ (bir.)}.$$

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar :

1. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini yozing?
2. Tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
3. Umumiy tenglamada A va B koeffitsiyentlarning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
4. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va geometrik izohlang?

5. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini yozing va koeffitsiyentlarining geometrik ma'nosini izohlang?
6. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektor yo'nalishidagi to'g'ri chiziqning parametrlil tenglamalarini yozing?
7. To'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasini yozing?
8. Koordinatalar tekisligida to'g'ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasini yozing va izohlang?
9. To'g'ri chiziqning normal ko'rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
10. To'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamasini uning normal shakldagi tenglamasiga keltirish jarayoni nimalardan iborat?
11. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsiyenti ma'lum bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing?
12. Koordinatalar tekisligida berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing?
13. Burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak qanday formula yordamida aniqlanadi?
14. Burchak koeffitsiyentlar tilida to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?
15. Umumiy shakldagi tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
16. Umumiy tenglamalar koeffitsiyentlari tilida to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari nimalardan iborat?
17. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulalarini yozing va ularni izohlang?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. Koordinatalar tekisligida chiziq tenglamasi.
2. Normal vektor.
3. Yo'naltiruvchi vektor.
4. To'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamasi.
5. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
6. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.
7. Burchak koeffitsiyent.
8. To'g'ri chiziqning parametrlil tenglamalari.
9. To'g'ri chiziqning kanonik shakldagi tenglamasi.
10. To'g'ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasi.
11. To'g'ri chiziqning normal shakldagi tenglamasi.
12. Normallovchi ko'paytuvchi.
13. Bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
14. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
15. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.
16. Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar.
17. Parallel to'g'ri chiziqlar.
18. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

15.1. A(1; 2), B(2; 3), C(-2; 0), D(-3; -1) nuqtalar ichidan $3x-4y+5=0$ to'g'ri chiziqda yotganlarini ajratib ko'rsating?

15.2. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamalarini tuzing:

- a) Koordinatalar boshidan o'tuvchi va $\mathbf{n}(1;4)$ vektorga perpendikulyar;
- b) A(2; -5) nuqtadan o'tuvchi va C(3; 4) vektorga parallel;
- c) Koordinata o'qlaridan $a=5$, $b=-3$ kesmalar ajratuvchi;
- d) B(-4; -1) nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsiyenti $R=2$;
- e) C(-1; 3) va D(2; 5) nuqtalardan o'tuvchi;
- f) $\mathbf{m}(2; -1)$ vektorga perpendikulyar bo'lib, oy ordinatani 3 nuqtada kesuvchi;
- g) Uchlari E(4;-5), N(2; 3) nuqtalarda kesmaning o'rta perpendikulyari;
- h) F(8; 6) nuqtadan o'tib koordinatalar burchaklaridan yuzasi 12 (kv.bir) uchburchak ajratuvchi.

15.3. ABCD parallelogramning uchta uchi koordinatalari berilgan: A(-2; 7), B(4; -2), C(-6; -4). Uning tomonlari tenglamalarini tuzing va D nuqta koordinatalarini toping.

15.4. ABC uchburchak uchlari koordinatalari berilgan: A(3; 2), B(1; 5) va C(-1; 2). Quyidagilarni aniqlang:

- a) S uchidan tushirilgan CD balandlik tenglamasi va uzunligini;
- b) Burchak ABC kattaligini;
- c) A uchidan o'tkazilgan AE medianana tenglamasini;
- d) AE medianana va CD balandlik kesishgan nuqta koordinatalarini.

15.5. Quyidagi to'g'ri chiziq juftliklari ichidan o'zaro parallel va perpendikulyar bo'lganlarini ajratib ko'rsating:

- a) $2x-y-3=0$ va $6x-3y+5=0$; b) $x-2y-7=0$ va $6x+3y+2=0$
- c) $3x+2y+4=0$ va $5x-7y+6=0$; d) $y=2x+3$ va $x+2y-5=0$
- e) $x/3+y/6=1$ va $y = -2x+5$

15.6. K(-1; 3) nuqtadan quyidagi to'g'ri chiziqlargacha bo'lgan masofalarni toping:

- a) $x-y=0$, b) $3x-4y+1=0$ c) $8x+6y-9=0$.

15.7. masaladagi o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

15.8. $2x+5y-3=0$ to'g'ri chiziqda yotib, (3; -7) va (5; -1) nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtani toping.

15.9. Qarama-qarshi uchlari (-6; 7) va (-2; 3) nuqtalarda joylashgan kvadratning tomonlari tenglamalarini tuzing.

15.10. Uchburchak uchlaridan biri $(-1; 2)$ nuqtada bo'lib, uning ikki medianalari tenglamalari berilgan:

$$5x+4y-17=0, 4x-y-8=0.$$

Uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

[2] (95-115 betlar)

[6] (70-87 betlar)

[7] (64-76 betlar)

16- MA'RUZA. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Reja:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha.

Ellips va uning kanonik tenglamasi.

2. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

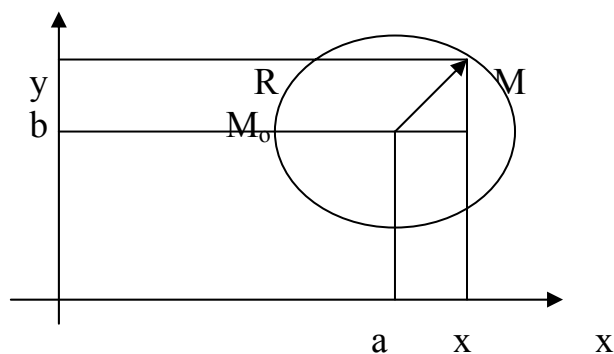
3. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

1. Chiziq tenglamasi koordinatalar sistemasining joylashishiga qarab turli ko'rinishda bo'lishi mumkin. Koordinatalarni almashtirish yordamida chiziqning ixtiyoriy shakldagi tenglamasini sodda (kanonik) ko'rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb, $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0$ ($A^2+B^2+C^2 \neq 0$) shakldagi tenglamaga aytiladi.

O'rta maktab matematikasida o'rganilgan aylana ikkinchi tartibli egri chiziqlar jumlasiga kiradi. Buning tasdig'i sifatida aylanaga berilgan ta'rifni va uning sodda tenglamasini eslash kifoya. Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, koordinatalar tekisligida markaz deb ataluvchi $M_0 (a ; b)$ nuqtadan teng radius deb ataluvchi R masofada yotuvchi nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) bo'lmish aylana quyidagi

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ tenglama bilan aniqlanadi (1 – rasm). Ushbu tenglama aylananing kanonik tenglamasi deyiladi. Markazi koordinatalar boshida va R radiusli aylana $x^2 + y^2 = R^2$ tenglama vositasida ifodalanadi.



1- rasm.

Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlashi uchun uning koeffitsiyentlari quyidagi munosabatlarni bajarishi etarli: $A = C$, $B = 0$ va $D^2 + E^2 - AF > 0$.

Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas kattalikka (fokuslar orasidagi masofadan katta) teng nuqtalar to'plamiga **ellips** deyiladi.

Agar o'zgarmas kattalikni $2a$, fokuslar orasidagi masofani esa $2c$ bilan belgilasak va tekislikda ox abstsissa o'qi fokuslari orqali o'tuvchi, koordinatalar boshi F_1F_2 kesmaning o'rtasida joylashgan koordinatalar sistemasi tanlasak, ellips tenglamasi soddalashadi va quyidagi kanonik ko'rinishga keladi

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \text{ bu yerda } b^2 = a^2 - c^2 \ (a > c).$$

Ushbu holda ellips fokuslari: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (2-rasm).

Koordinatalar boshi O nuqta ellipsning simmetriya markazi, koordinata o'qlari esa uning simmetriya o'qlari hisoblanadi.

$A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ nuqtalarga ellipsning uchlari, $OA_2 = a$ va $OA_1 = b$ kesma uzunliklariga uning mos ravishda katta va kichik yarim o'qlari deyiladi.

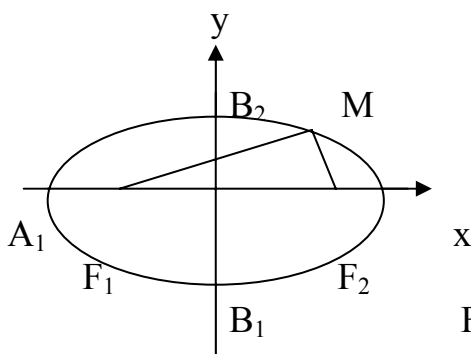
Shunday qilib, ellips ikki simmetriya o'qlariga va simmetriya markaziga ega qavarik epik chiziqdir.

$\varepsilon = c/a$ kattalikka ellipsning ekssentrisiteti deb ataladi va har qanday ellips uchun $\varepsilon < 1$ munosabat o'rinli. Ekssentrisitet ellipsning cho'zinchoqligini xarakterlaydigan kattalikdir.

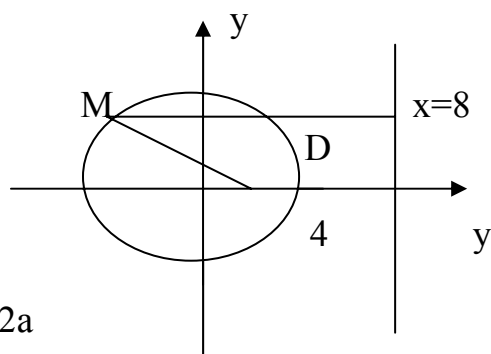
Aylana ellipsning xususiy holi bo'lib, ekssentrisiteti 0 ga teng yoki katta va kichik yarim o'qlari teng bo'lgan ellipsdir.

Simmetriya markazi $(x_0; y_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel ellips tenglamasi quyidagi ko'rinishdan iborat:

$$(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1.$$



2 – rasm.



3 – rasm.

Masala. $D(2; 0)$ nuqtaga $x = 8$ to'g'ri chiziqqa qaraganda ikki marta yaqinroq masofada joylashadigan $M(x, y)$ nuqtalarning xarakat trayektoriyasini aniqlang?

M nuqta harakat trayektoriyasini tekislikda $2 DM = MK$ tenglamani qanoatlantiruvchi M nuqtalar to'plami sifatida aniqlaymiz (3 – rasm). Koordinatalar tekisligida ikki nuqta orasidagi masofani va nuqtadan vertikal to'g'ri chiziqqacha masofani topish formulalarini qo'llab,

$$2 \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |8-x|$$

tenglamani olamiz va uni soddalashtirsak, $x^2/16 + y^2/12 = 1$ ko'rinishga keladi. Shunday qilib, M nuqta ellips bo'ylab harakatlanadi, ellipsning katta o'qi va fokuslari ox absissa o'qida joylashadi (3 – rasm).

2. Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalari ayirmasi absolyut qiymati o'zgarmas kattalikka (nolga teng emas va fokuslar orasidagi masofadan kichik) teng nuqtalar to'plamiga **giperbola** deyiladi.

Agar o'zgarmas kattalik $2a$, fokuslar orasidagi masofa $2c$ orqali belgilansa va yuqorida ellips uchun tanlangan koordinatalar sistemasi tanlansa, u holda giperbola tenglamasi quyidagi kanonik ko'rinishga keladi

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \text{ bu yerda, } b^2 = c^2 - a^2 \text{ (} c > a \text{)}.$$

Giperbola fokuslari: $F_1(-c; 0)$ va $F_2(c; 0)$ (4 – rasm).

0 nuqta giperbolaning simmetriya markazi, koordinata o'qlari esa uning simmetriya o'qlaridir. Giperbola abstsissa o'qini haqiqiy uchlari deb ataluvchi $A_1(-a; 0)$ va $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesadi.

$OA = a$ kattalik uning haqiqiy yarim o'qi deyiladi. $B_1(0; -b)$ va $B_2(0; b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari deyilsa, $OB_2 = b$ kattalik uning mavhum yarim o'qi deyiladi.

Giperbolaning asosiy to'g'ri to'rtburchagi deb, markazi koordinatalar boshida, tomonlari koordinata o'qlariga parallel va uning uchlaridan o'tuvchi to'g'ri to'rtburchakka aytiladi.

Giperbola o'zining ikkita $y = \pm (b/a)x$ tenglamalar bilan aniqlanadigan asimptotalariga ega. Giperbola asimptotalari uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi diagonallaridir. Giperbolani qurish uchun dastlab uning asosiy to'g'ri to'rtburchagini va asimptotalarini qurgan ma'qul.

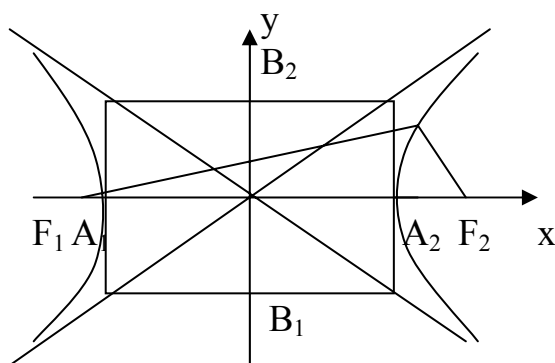
Giperbola ekssentrisiteti $\varepsilon = c/a > 1$ bo'lib, uning asosiy to'g'ri to'rtburchagining cho'zinchoqligini xarakterlaydi.

Simmetriya markazi $(x_0; y_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel giperbola

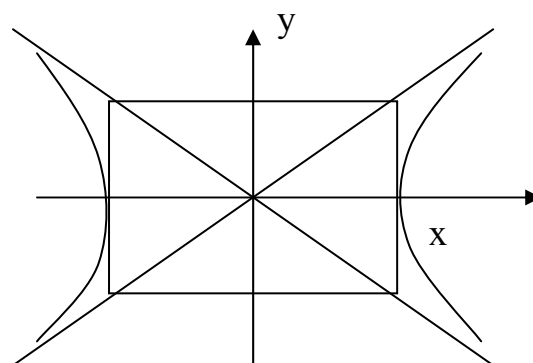
$$(x-x_0)^2/a^2 - (y-y_0)^2/b^2 = 1$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Yarim o'qlari teng, ya'ni $a = b$ giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi. Teng tomonlama giperbola tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ ko'rinishda bo'lib, uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi kvadratdan iborat va ekstsentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng.



4 – rasm.



5 – rasm.

Masala. Asimptotalari $y = \pm (1/2)x$ tenglamalar bilan berilgan, fokuslari orasidagi masofa 10 birlikka teng bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing?

Giperbola fokuslari abssissa o'qida yotadi deb qarab, uning kanonik tenglamasini tuzamiz: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

Fokuslar orasidagi masofa $F_1F_2 = 2c = 10$ bo'lganidan, $c = 5$.

Giperbola uchun $c^2 = a^2 + b^2$ bo'lganidan va $b/a = 1/2$ berilganidan foydalanib, quyidagi sistemani tuzamiz va uni echamiz:

$$\begin{cases} b/a = 1/2 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$

Sistema yechimi: $a = 2\sqrt{5}$ va $b = \sqrt{5}$. Demak, giperbola tenglamasi $x^2/20 + y^2/5 = 1$ kanonik tenglamadan iborat (5 – rasm).

3. Tekislikda fokusi deb ataluvchi berilgan F nuqtadan va direktrisasi deb ataluvchi berilgan DD' to'g'ri chiziqdan teng masofada yotuvchi nuqtalar to'plamiga **parabola** deyiladi.

Abssissa o'qi F fokus nuqtadan DD' direktrisasi perpendikulyar ravishda o'tuvchi, ordinata o'qi esa fokus va direktrisalarning o'rtasidan o'tuvchi koordinatalar sistemasi tanlasak, parabola tenglamasi quyidagi kanonik ko'rinishni oladi

$$y^2 = 2Rx,$$

bu erda, R – fokus va direktrisa orasidagi masofa.

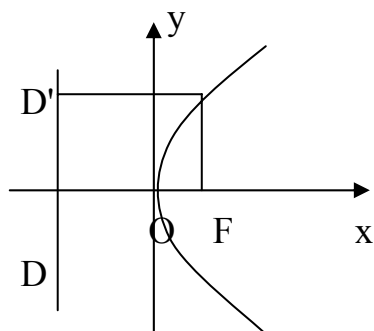
Direktrisa tenglamasi $y = -R/2$, fokus esa $F(R/2; 0)$ (6 – rasm).

Koordinatalar boshi parabola uchi, abssissa o'qi esa uning simmetriya o'qidir. Parabola ekssentrisiteti $\varepsilon = 1$.

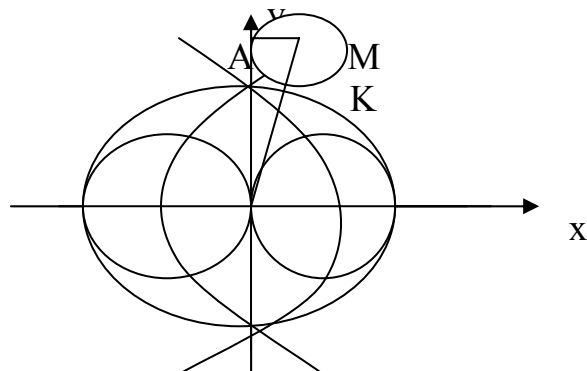
Agar ordinata o'qi parabola simmetriya o'qi bo'lsa, u holda uning tenglamasi $x^2 = 2Ry$ ($R > 0$) ko'rinishda bo'lib, direktrisa tenglamasi $y = -R/2$ va fokusi $F(0; R/2)$ nuqtadir.

Uchi $(x_0; y_0)$ nuqtada, simmetriya o'qlari koordinata o'qlaridan biriga parallel parabola quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

$$(y - y_0)^2 = 2R(x - x_0) \text{ yoki } (x - x_0)^2 = 2R(y - y_0).$$



6 – rasm.



7 – rasm.

Masala. Oy ordinata o'qiga va $x^2 + y^2 = 4$ aylanaga urinuvchi aylanalar markazlari to'plami tenglamasini tuzing?

$M(x; y)$ – aylanalar markazlari to'plamining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Masala shartiga binoan $KM = AM$ (7 – rasm). Berilgan aylana radiusi $OK = 2$ ekanligini va $KM = OM - OK$ tenglikni hisobga olsak, koordinatalarda quyidagi tenglamani olamiz:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = |x| \text{ yoki } y^2 = 4|x| + 4.$$

Ushbu tenglama uchlari $(-1; 0)$ va $(1; 0)$ nuqtalarda, fokuslari koordinatalar boshida, direktrisalari mos ravishda $x = -2$ va $x = 2$ to'g'ri chiziqlardan iborat, abssissa o'qi simmetriya o'qi bo'lgan parabolalarni ifodalaydi (7 – rasm).

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy ko'rinishdagi tenglamasini yozing?
2. Umumiy tenglama koeffitsientlari qanday munosabatlarni qanoatlantirganda, ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlaydi?
3. Tekislikda qanday nuqtalar to'plamiga ellips deyiladi?
4. Ellipsning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?
5. Ellipsning uchlari, yarim o'qlari, simmetriya markazi va simmetriya o'qlarini ko'rsating?
6. Ellipsning eksentrisiteti deb qanday kattalikka aytiladi va u nimani xarakterlaydi?
7. Qanday ellipsga aylana deyiladi?
8. Tekislikda qanday nuqtalar to'plamiga giperbola deyiladi?
9. Giperbolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni sharhlang?
10. Giperbolaning haqiqiy va mavhum uchlari, yarim o'qlarini ko'rsating, simmetriya markazi, simmetriya o'qlari va asosiy to'g'ri to'rtburchagi mavjudmi?

11. Giperbolaning ekssentrisiteti deb qanday kattalikka aytiladi va u nimani xarakterlaydi?
12. Qanday to'g'ri chiziqlarga giperbolaning asimptotalari deyiladi va ularning tenglamalarini yozing?
13. Qanday giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi va uning kanonik tenglamasini yozing?
14. Tekislikda qanday nuqtalar to'plamiga parabola deyiladi?
15. Parabolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?
16. Parabola fokusini aniqlang va direktrisasi tenglamasini yozing?
17. Ordinata o'qi simmetriya o'qi bo'lgan parabola, uning direktrisasi tenglamalarini yozing va fokusini aniqlang?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziq.
2. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
3. Ellips fokuslari, uchlari, katta va kichik yarim o'qlari, simmetriya markazi va simmetriya o'qlari.
4. Ellips ekssentrisiteti.
5. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
6. Giperbola fokuslari, haqiqiy va mavhum uchlari, yarim o'qlari, simmetriya markazi va simmetriya o'qlari.
7. Giperbola ekssentrisiteti.
8. Giperbola asimptotalari va ularning tenglamalari.
9. Teng tomonli giperbola.
10. Parabola va uning kanonik tenglamasi.
11. Parabola fokusi, direktrisasi, uchi va simmetriya o'qi.

Mustaqil ishlash uchun misollar:

- 16.1.** Ellipsning kanonik tenglamasini quyidagi berilganlar bo'yicha tuzing:
- a) $F_1(-3; 0)$ va $F_2(3; 0)$ fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi $2a=10$;
 - b) uchlari $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$ va $B_2(0; 3)$ nuqtalarda;
 - c) fokuslari orasidagi masofa $2C=8$ va ekssentrisiteti $\varepsilon=0,5$;
 - d) $(1; 3)$ va $(-4; -1)$ nuqtalardan o'tuvchi;
 - e) katta yarim o'qi $a=10$ va ekssentrisiteti $\varepsilon=0,6$;
 - f) $(-2; 11\sqrt{15})$ nuqtadan o'tib, ekssentrisiteti $\varepsilon=2/\sqrt{15}$.
- 16.2.** Abssissa o'qi bilan $A(4; 0)$ uchida, ordinata bilan esa $B(0; 3)$ uchida urinuvchi ellips tenglamasini tuzing.
- 16.3.** $R(1; -1)$ nuqtadan $x^2/9 + y^2/4 = 1$ ellipsiga kesuvchi o'tkazilgan. Agar R nuqta hosil bo'lgan vatarning o'rta nuqtasi bo'lsa, kesuvchi tenglamasini tuzing.

16.4. $x^2/25+y^2/16=1$ ellips to'g'ri burchak ostida ko'rinadigan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini quring.

16.5. Giperbolaning kanonik tenglamasini quyida berilganlar bo'yicha tuzing:

- a) $F_1(-4; 0)$ va $F_2(4; 0)$ fokuslarigacha masalalar ayirmasining moduli $2a=6$;
- b) haqiqiy uchlari orasidagi masofa $2a=8$, fokuslari orasidagi masofa $2c=10$;
- c) haqiqiy yarim o'qi $a=3$ va $(6; 2\sqrt{3})$ nuqtadan o'tuvchi;
- d) $(4\sqrt{17}; 4)$ va $(4; 0)$ nuqtalardan o'tuvchi;
- e) $(-5; 3)$ nuqtadan o'tib, eksentrisiteti $\varepsilon=\sqrt{2}$;
- f) $(-\sqrt{2}; 1)$ nuqtadan o'tib, teng yonli bo'lgan;
- g) asimptotalari orasidagi burchak 60° va $(6; -3)$ nuqtadan o'tuvchi.

16.6. $F(-8; 0)$ nuqtaga nisbatan $x=-2$ to'g'ri chiziqqa ikki marta yaqin masofada joylashgan $M(x; y)$ nuqta harakat trayektoriyasini quring?

16.7. $x^2/16-y^2/9=1$ giperbola to'g'ri burchak ostida ko'rinadigan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini quring.

16.8. Parabolaning kanonik tenglamasini quyidagi berilganlar bo'yicha tuzing:

- a) ox o'qida joylashgan fokusi va uchigacha masofa $R/2=4$;
- b) oy o'qida joylashgan fokusi va direktrisasi orasidagi masofa $R=6$;
- c) abssissa o'ki simmetriya o'qi bo'lib, $M(2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi;
- d) uchi koordinatalar boshida va fokusi $(3; 0)$ nuqtada;
- e) uchi koordinatalar boshida va direktrisasi $y+12=0$.

16.9. $y^2=12x$ parabola nuqtalaridan $x-y+7=0$ to'g'ri chiziqgacha eng qisqa masofani toping.

16.10. $y^2=4x$ parabola to'g'ri burchak ostida ko'rinadigan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini quring.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

- [2] (95-115 betlar)
- [6] (70-87 betlar)
- [7] (64-76 betlar)

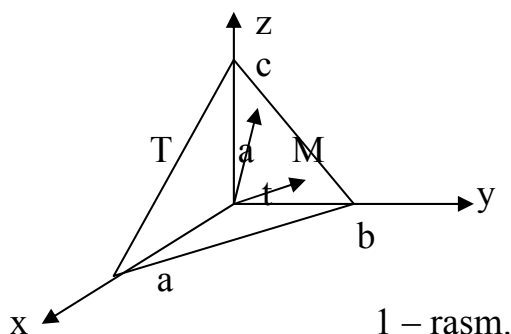
17-MA'RUZA. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI. FAZODA TEKISLIK

Reja:

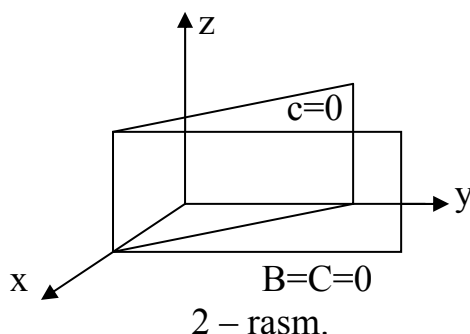
- 1. Fazoda tekislikning turli ko'rinishdagi tenglamalari. Nuqtasi va normal vektori bilan berilgan tekislik tenglamasi.**
- 2. Berilgan uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallelizm shartlari.**
- 3. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikgacha masofa.**

1. R_3 fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, \mathbf{a} radius vektor berilgan bo'lsin. \mathbf{a} radius vektor ohiridan vektorga yagona mumkin bo'lgan perpendikulyar tekislik (T) o'tkazilgan, $M(x, y, z)$ nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi va $\mathbf{OM} = \mathbf{r}(x, y, z)$ nuqtaning radius vektori bo'lsin.

$|\mathbf{a}| = R$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} / R = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ - \mathbf{a} vektorning birlik vektori, α, β va γ \mathbf{a} yoki \mathbf{v} vektorning koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchaklari bo'lsin (1 – rasm).



1 – rasm.



2 – rasm.

$\cos \alpha, \cos \beta$ va $\cos \gamma$ \mathbf{a} yoki \mathbf{v} vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Har qanday \mathbf{r} vektorning \mathbf{v} vektordagi sonli proyeksiyasi R ga teng:

$$Pr_{\mathbf{v}} \mathbf{r} = R \text{ yoki } (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = R \quad (R \geq 0) \quad (1)$$

(1) tenglamaga T tekislikning vektor shakldagi tenglamasi deyiladi. Vektor tenglama koordinatalarda

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = R \quad (R \geq 0) \quad (2)$$

ko'rinishda yoziladi. (2) tenglama tekislikning normal shakldagi tenglamasi deyiladi. Agar (2) tenglamani noldan farqli biror-bir songa ko'paytirsak, tenglamaga teng kuchli

$$A x + B y + C z + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (3)$$

Ko'rinishdagi tenglamani olamiz. (3) tenglamaga T tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi.

Har qanday (3) ko'rinishdagi tenglamani (2) normal shakldagi tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun umumiy tenglamani normallovchi ko'paytuvchi $\mu = \pm 1 / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ga ko'paytirish yetarli. $R = -\mu D$ ning nomanfiyligini ta'minlash maqsadida $+$ yoki $-$ ishoralaridan ozod had D ishorasining qarama – qarshisi tanlanadi. Natijada

$$\mu A x + \mu B y + \mu C z = R \quad (R \geq 0)$$

Bu yerda, $(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = 1$ munosabat 'rinli bo'lib, $\mathbf{v} = (\mu A, \mu B, \mu C)$ vektorning birlik vektor va uning koordinata o'qlaridagi sonli proyeksiyalari, mos ravishda quyidagilarga

$$\mu A = \cos \alpha, \quad \mu B = \cos \beta, \quad \mu C = \cos \gamma$$

tengligini payqash qiyin emas.

Agar tekislik umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, tenglama shaklidan tekislikning o'zi haqida quyidagilarni aniqlash mumkin: 1) agar $D = 0$ bo'lsa, $A x + B y + C z = 0$ tekislik koordinata boshidan o'tadi; 2) $\mathbf{N} = (A, B, C)$ vektor \mathbf{T} tekislikka perpendikulyar, ya'ni tekislikning normal vektoridir, chunki u $\mathbf{v} = (\mu A, \mu B, \mu C)$ vektorga kollinear: $\mu \mathbf{N} = \mathbf{v}$.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini tahlil qilish mumkin.

Aytaylik, agar $C = 0$ bo'lsa, $A x + B y + D = 0$ tenglama bir tomondan xoy koordinatalar tekisligida to'g'ri chiziqni ifodalasa,

R_3 fazoda to'g'ri chiziqdan o'tib, xoy koordinatalar tekisligiga perpendikulyar yoki **oz** applikata o'qiga parallel tekislikni aniqlaydi (2 – rasm). $B = C = 0$ bo'lsa, $A x + D = 0$ tekislik **ox** abstsissa o'qini $x = -D/A = a$ nuqtada o'qqa perpendikulyar yoki uoz koordinatalar tekisligiga parallel ravishda kesuvchi tekislikni aniqlaydi (2 – rasm) va hokazo. $x = 0$ – yoz koordinatalar tekisligi tenglamasi, $y = 0$ – xoz koordinatalar tekisligi tenglamasi va $z = 0$ esa xoy koordinatalar tekisligi tenglamasidir.

Agar umumiy ko'rinishdagi tekislik tenglamasida A, B, C va D sonlarning har biri noldan farq qilsa, u holda (3) umumiy tenglama quyidagi ko'rinishga keltirilishi mumkin

$$x/a + y/b + z/c = 1 \quad (4)$$

bu yerda, $a = -D/A$, $b = -D/B$ va $c = -D/C$. (4) tenglamaga tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi (2 – rasm).

Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan berilgan $\mathbf{N}(A, B, C)$ vektorga perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekislik tenglamasi vektor shaklda $(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ ko'rinishda yozilsa, koordinatalarda

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

shaklda yoziladi. Bu yerda, $\mathbf{r}_0 - M_0$ nuqtaning radius vektori.

Masala. $M_0(-2, 3, -1)$ nuqtadan o'tib, $\mathbf{N} = (1, -4, 2)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

Tuzilgan tenglamaga binoan $1(x + 2) - 4(y - 3) + 2(z + 1) = 0$ yoki $x - 4y + 2z + 16 = 0$.

2. Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ va $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ular orqali o'tuvchi yagona tekislik tenglamasini tuzish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Tekislik $(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tgani uchun $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

tenglama o'rinli, bu yerda A, B va C koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng emas. Tekislik berilgan ikkinchi $(x_2; y_2; z_2)$ va uchinchi $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalardan ham o'tgani uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

A, B va C noma'lumlarga nisbatan uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ldi. Ma'lumki, ushbu bir jinsli sistema determinanti nolga teng bo'lgandagina nolmas echimlarga ega. Demak, berilgan bir to'g'ri chiziqli yotmaydigan uchta nuqtadan o'tuvchi yagona tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

shaklda yoziladi. Tenglamani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ohirgi ikki tenglamaning o'zaro teng kuchli ekanligini tekshirib ko'rish qiyin emas.

Ikki T_1 va T_2 tekislik umumiy ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad (T_1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad (T_2) \end{cases}$$

Berilgan tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak ularning normal $N_1(A_1; B_1; C_1)$ va $N_2(A_2; B_2; C_2)$ vektorlari orasidagi φ burchakka teng. Ushbu tenglik tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

$$\cos \varphi = (N_1, N_2) / |N_1| |N_2| =$$

$$= A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 / \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}.$$

Bu yerda, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Berilgan tekisliklarning perpendikulyarlik va parallelizm shartlari quyidagilardan iborat:

$$\begin{aligned} T_1 \perp T_2: (N_1, N_2) = 0 & \text{ yoki } A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0, \\ T_1 \parallel T_2: N_1 = \lambda N_2 & \text{ yoki } A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2. \end{aligned}$$

Masala. $x+y+z=1$ va $z=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping?

Berilgan tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchak mos normal vektorlar $(1, 1, 1)$ va $(0, 0, 1)$ orasidagi φ burchakka teng (3-rasm):

$$\cos \varphi = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 / \sqrt{3} \cdot \sqrt{1}.$$

Demak, $\varphi = \arccos 1 / \sqrt{3}$.

3. R_3 fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, berilgan M_0 nuqtadan umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) tekislik orasidagi d masofani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. $r_0(x_0, y_0, z_0)$ vektor M_0 nuqtaning radius vektori va $r(x, y, z)$ vektor esa tekislikning ixtiyoriy M nuqtasi radius

vektori bo'lsin. d masofa $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ vektorining \mathbf{a} yoki \mathbf{v} vektordagi sonli proeksiyasining absolyut qiymatiga teng: $d = | \text{Pr}_{\mathbf{v}} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) |$ (4 – rasm). Masofani hisoblash formulasi vektor ko'rinishda yoki tekislikning normal tenglamasi parametrlari orqali yozilishi mumkin (13 – mavzuga qarang). Tekislikning umumiy tenglamasi parametrlari orqali esa

$$d = | Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D | / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

ko'rinishda yoziladi.

Masala. $(-1, 4, -3)$ nuqtadan $x + 2y - 2z + 5 = 0$ tekislikgacha bo'lgan masofani toping?

Nuqtadan tekislikgacha bo'lgan masofani hisoblash formulasiga binoan:

$$d = | -1 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) + 5 | / \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 6 \text{ (bir.)}.$$

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Fazoda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislik vaziyati qanday aniqlanadi?
2. Tekislikning vektor shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?
3. Tekislikning normal shakldagi tenglamasini yozing?
4. Tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb, qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
5. Umumiy tenglama koeffitsiyentlarining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
6. Tekislik umumiy ko'rinishdagi tenglamasi uning normal shakldagi tenglamasiga qanday keltiriladi,
7. Tekislik umumiy tenglamasining mumkin bo'lgan barcha xususiy hollarini sharhlab bering?
8. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb, qanday shakldagi tenglamaga aytiladi va nima uchun?
9. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan vektorga perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing?
10. Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasining qanday shakllarini bilasiz?
11. Ikki tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni topish masalasi qanday yechiladi?
12. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?
13. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan tekislikgacha bo'lgan masofani hisoblash formulasini yozing?

Mavzuning tayanch iboralar:

1. Tekislikning vektor shakldagi tenglamasi.
2. Tekislikning normal tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi.
4. Tekislik umumiy tenglamasini normallashtirish.
5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
6. Nuqtadan vektorga perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekislik tenglamasi.
7. Uchta bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.
8. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak.
9. Tekisliklarning perpendikulyarligi.
10. Tekisliklarning parallelligi.
12. Nuqtadan tekislikgacha masofa.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

17.1. $(1; 2; -3)$ nuqtadan o'tib, $n(4; -1; 5)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

17.2. $(0; -1; 2)$, $(2; 1; 3)$ va $(1; 2; 3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

17.3. $(2; -3; 1)$ nuqtadan o'tib, $4x+y-2z+7=0$ tekislikka parallel va perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekisliklar tenglamalarini tuzing.

17.4. oy ordinata o'qidan va $(1; 2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

17.5. ABCD tetraedr uchlari berilgan $A(3; -1; 5)$, $B(4; -1; 3)$, $C(0; 5; 1)$ va $D(4; 0; 2)$:

a) C uchidan o'tib, AB qirraga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

b) D uchidan o'tib, ABC yoqqa parallel tekislik tenglamasini yozing.

17.6. Quyidagi tekisliklarning koordinatalari sistemasiga nisbatan joylashishi xususiyatlarini ko'rsating:

a) $x-y+1=0$, **b)** $x+2z=0$, **c)** $x-2y+3z=0$, **d)** $y-z+2=0$, **e)** $x+3=0$,
f) $2z+3=0$, **g)** $2x-z+4=0$, **h)** $3y+z=0$, **i)** $4x+3y=0$, **j)** $2y-5=0$.

17.7. Tekisliklar tenglamalarini tuzing:

a) $(3; 2; -1)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar tekisligining har biriga parallel bo'lgan;

b) $(-2; 3; 1)$ nuqtadan va koordinata o'qlarining har biridan o'tuvchi.

17.8. Quyidagi tekislik tenglamalarini kesmalarga nisbatan va normal ko'rinishga keltiring:

a) $3x-2y-6z+5=0$, b) $-x+8y-4z+17=0$.

17.9. (4; 5; -3) va (2; -1; 3) nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini yozing.

17.10. $x+5y-z+2=0$ va $4x-y+3z-1=0$ tekisliklar kesishish chizig'idan o'tuvchi va: a) koordinatalar boshidan; b) (1; 1; 1) nuqtadan; c) oy o'qiga parallel bo'lgan tekisliklar o'tkazing.

17.11. Quyida tekislik juftliklari orasidagi ikki yoqlama burchaklarni toping:

a) $2x-2y+z+5=0$ va $16x+8y+2z-1=0$; b) $2x+5y+4z+8=0$ va $6x-3z+1=0$.

17.12. Quyidagi nuqtalardan berilgan tekisliklarga masofalarni toping:

a) (3; -1; 4), $2x+2y+z-9=0$; b) (1; 0; -3), $2x+3y+5=0$;

c) (-1; 2; $\sqrt{2}$), $5x-3y+\sqrt{2}z=0$.

17.13. $Ax+By+Cz+D_1=0$ va $Ax+By+Cz+D_2=0$ o'zaro parallel tekisliklar orasidagi masofani topish formulasini keltirib chiqaring.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

[2] (119-123 betlar)

[6] (88-101 betlar)

[7] (78-88 betlar)

[13] (53-63 betlar)

18-MA'RUZA. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ

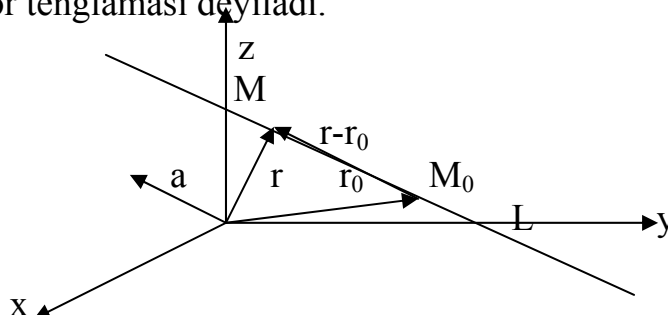
Reja:

1. Fazoda to'g'ri chiziqlarning turli ko'rinishdagi tenglamalari.
2. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallelizm shartlari.

1. Fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ nuqta va nolmas $\mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$ radius vektor berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan \mathbf{a} vektorga parallel L to'g'ri chiziq o'tqazamiz. $M (x, y, z)$ nuqta L to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi va $\mathbf{r} (x, y, z)$ vektor uning radius vektori, $\mathbf{r}_0 (x_0, y_0, z_0)$ vektor esa berilgan M_0 nuqtaning radius vektori bo'lsin. $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor L to'g'ri chiziqda yotgani uchun berilgan \mathbf{a} vektorga kollinear:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t \mathbf{a} \quad (1).$$

(1) tenglamada t ixtiyoriy haqiqiy son bo'lib, parametr deyiladi. Agar t parametr haqiqiy sonlar o'qida yugurib son qiymat qabul qilsa, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{a}$ vektor ohiri L to'g'ri chiziq bo'ylab yuguradi (1 – rasm). (1) tenglamaga fazoda berilgan nuqtadan berilgan vektor yo'nalishida o'tuvchi to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.



(1) – rasm.

Koordinatalarda (1) tenglama quyidagi uchta tenglamalarga ajraladi:

$$\begin{cases} x - x_0 = t a_1, \\ y - y_0 = t a_2, \\ z - z_0 = t a_3. \end{cases} \quad (2)$$

(2) tenglamalarga to'g'ri chiziqning parametrli tenglamalari deyiladi. Agar (2) sistemada t parametr yo'qotilsa, quyidagi qo'sh tenglama hosil bo'ladi:

$$(x - x_0)/a_1 = (y - y_0)/a_2 = (z - z_0)/a_3, \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0) \quad (3).$$

(3) ko'rinishdagi tenglamaga fazoda to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. (3) tenglamada a_1, a_2, a_3 sonlardan ixtiyoriy biri yoki ikkitasi nolga teng bo'lishi mumkin.

Ushbu hollarda, qulayligi uchun mahrajlarda bir yoki ikkita nollar yozish qabul qilingan bo'lib, yozuv shartli tus oladi. (3) tenglama fazoda $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, $\mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$ vektorga parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Masala. Koordinatalar fazosida $(2, -3, 1)$ nuqtadan o'tib, $(-1, 0, 4)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing. To'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi, (3) tenglamaga binoan,

$$(x - 2) / -1 = (y + 3) / 0 = (z - 1) / 4$$

shaklda bo'ladi. Ushbu tenglamalar o'z navbatida quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} 4x + z - 7 = 0, \\ y + 3 = 0. \end{cases}$$

Shunday qilib, qaralayotgan to'g'ri chiziq $z = -4x + 7$ va $y = -3$ tekisliklarning umumiy kesishish to'g'ri chizig'idan iborat.

Fazoda ikki tekislik o'zlarining umumiy

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad (T_1) \quad \text{va} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad (T_2)$$

ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

Agar $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2 \neq D_1 / D_2$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, T_1 va T_2 tekisliklar turli o'zaro parallel tekisliklarni aniqlaydi. Agar $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2 = D_1 / D_2$ munosabatlar bajarilsa, T_1 va T_2 tekisliklar ustma – ust joylashadi, ya'ni berilgan tenglamalar teng kuchli bo'lib, aynan bir tekislikni aniqlaydi. Qolgan barcha hollarda tekisliklar to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Berilgan tekisliklar umumiy tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

sistema aynan to'g'ri chiziqni aniqlashi uchun

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

matritsa rangining 2 ga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Yoki huddi shuning o'zi, quyidagi ikkinchi tartibli

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

aniqlovchilardan birining noldan farqli bo'lishi kifoya.

Aniqlik uchun ulardan birinchisi noldan farqli bo'lsin. Unda (4) tenglamalar sistemasini x va y ga nisbatan yechish mumkin:

$$\begin{cases} x = \alpha z + \mu, \\ y = \beta z + \nu. \end{cases}$$

Yuqoridagi tenglamalar sistemasi esa, quyidagi

$$x - \mu / \alpha = u - \nu / \beta = z / 1$$

tenglamalarga teng kuchli, bu yerda, α , β , μ va ν biror – bir sonlar.

Haqiqatdan ham, ushbu tenglamalar fazoda $(\mu, \nu, 0)$ nuqtadan o'tib, $(\alpha, \beta, 1)$ vektorga parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Asosiy matritsasi rangi 2 ga teng bo'lganda, (4) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasiga fazoviy to'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalari deyiladi.

Masala. Oy ordinata o'qining kanonik shakldagi tenglamalarini tuzing.

Oy o'qi xoy va yoz koordinata tekisliklari kesishmasidan iborat:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ohirgi tenglamalar sistemasini shartli ravishda $x / 0 = y / 1 = z / 0$

ko'rinishda yozish mumkin. Haqiqatdan ham, oy o'qi $(0, 0, 0)$ nuqtadan o'tib, $\mathbf{j}(0, 1, 0)$ vektor yo'nalishidagi to'g'ri chiziqdir.

2. Fazoda ikki L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar kanonik

$$(x-x_1)/a_1=(y-y_1)/a_2=(z-z_1)/a_3 \text{ (} L_1 \text{) va } (x-x_2)/b_1=(y-y_2)/b_2=(z-z_2)/b_3 \text{ (} L_2 \text{)}$$

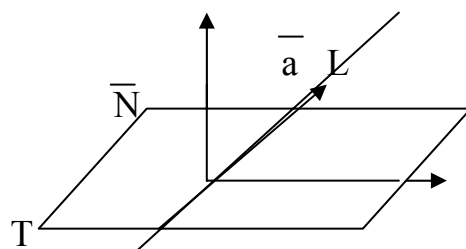
ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lib, ular orasidagi burchak kattaligini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak, L_1 va L_2 larning yo'naltiruvchi vektorlari $\mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$ va $\mathbf{b} (b_1, b_2, b_3)$ orasidagi burchakka teng. Berilgan to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotishi yoki o'zaro ayqash bo'lishi mumkin. Barcha hollarda ular orasidagi burchakni topish masalasi to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltiriladi:

$$\cos \varphi = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Fazoda umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan (T) tekislik va kanonik ko'rinishdagi tenglamalari bilan (L) to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin:

$Ax + By + Cz + D = 0$ (T) , $(x-x_0)/a_1 = (y-y_0)/a_2 = (z-z_0)/a_3$ (L) . Berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi α burchak sinusi (L) to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori $\mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$ bilan (T) tekislik normal vektori $\mathbf{N} (A, B, C)$ orasidagi β burchak kosinusiga teng (2-rasm).



(2 – rasm)

Masala vektorlar orasidagi burchak kattaligini topish masalasiga keltirildi. Shunday qilib,

$$\cos \beta = \sin \alpha = (a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_3 \cdot C) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$L \perp T : a_1/A = a_2/B = a_3/C, \quad L \parallel T : a_1 A + a_2 B + a_3 C = 0.$$

Masala. $(-3, 4, -2)$ nuqtadan o'tib, $x + 2y - 5z + 8 = 0$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

To'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lganidan, tekislik normal vektori to'g'ri chiziq yo'naltiruvchisidir. Demak, to'g'ri chiziqning kanonik shakldagi tenglamalari

$$x + 3/1 = y - 4/2 = z + 2/-5 \text{ ko'rinishga ega.}$$

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Fazoda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan to'g'ri chiziq qanday aniqlanadi?
2. Fazoda to'g'ri chiziqning vektor tenglamasini yozing?

3. To'g'ri chiziqning parametrli tenglamalari deb qanday tenglamalarga aytiladi?
4. Berilgan nuqtadan berilgan vektor yo'nalishida o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamalarini yozing va uni izohlang?
5. Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalarini yozing va uni izohlang?
6. oz applikata o'qining kanonik tenglamalarini tuzing?
7. Fazoda kanonik ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
8. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
9. To'g'ri chiziq bilan tekislik perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?

Mavzuning tayanch iboralari:

1. Fazoda nuqtadan o'tuvchi va vektorga parallel to'g'ri chiziq kanonik tenglamalari.
2. Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalari.
3. Fazoda to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.
4. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.
5. To'g'ri chiziq va tekislik perpendikulyarligi.
6. To'g'ri chiziq va tekislikning parallelligi.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

18.1. Quyida berilgan to'g'ri chiziqlarda yotuvchi bir nechta nuqta koordinatalarini aniqlang:

a) $(x+1)/2=y/(-1)=(z-3)/4$; **b)** $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=-4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-y+z+6=0 \\ x+3y-4z-1=0 \end{cases}$

18.2. **a)** $\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 2x-y+2z-4=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=2-t \\ y=-5+2t \\ z=3+4t \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini toping.

18.3. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziq tenglamalarini tuzing:

a) (2; -3; 1) va (-1; 4; -2) nuqtalardan o'tuvchi;

b) (-4; 3; -2) nuqtadan o'tib, $\mathbf{a}(1; 0; -3)$ vektorga parallel va perpendikulyar bo'lgan;

c) $2x-y+3z+4=0$ tekislikning oxy koordinatalar tekisligi bilan kesishmasi;

d) $x+y-z+2=0$ tekislik bilan (1; 0; 3), (1; -1; -2), (2; -2; 1) nuqtalardan o'tuvchi tekislik kesishmasi.

18.4. Quyida to'g'ri chiziqlarning kanonik va parametrik tenglamalarini tuzing:

a) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z-6=0 \\ 3x+2y-z+4=0 \end{cases}$

18.5. (1; -3; 4) nuqtadan o'tib, $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 3x+2y-z+4=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini quring.

18.6. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashish xususiyatlarini ko'rsating:

a) $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5z=0 \\ 2y+z+3=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y=0 \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases}$

18.7. $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq ko'effitsiyentlari qanday shartlarni bajarganda quyidagilar o'rinli:

a) oy o'qiga parallel; b) ox o'qini kesib o'tadi;
c) oz o'qi bilan ustma-ust yotadi; d) oxy koordinatalar tekisligida yotadi;
e) koordinatalar boshidan o'tadi.

18.8. $(x+3)/(-1)=(y-2)/1=z/\sqrt{5}$ va $x/1=(y+1)/1=(z-4)/\sqrt{2}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

18.9. λ ning qanday qiymatida $(x-3)/\lambda=(y-1)/4=(z-7)/2$ va $(x+2)/2=y/(-3)=(z-1)/4$ to'g'ri chiziqlar kesishadi.

18.10. a) $(x-3)/2=(y+1)/3=(z-5)/6$ va $6x+15y-10z+7=0$;

b) $x/1=(y-2)/(-2)=(z+3)/2$ va $2x+y+z-1=0$.

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati:

[2] (119-123 betlar)

[6] (88-101 betlar)

[7] (78-88 betlar)

[13] (53-63 betlar)

Adabiyotlar.

Asosiy adabiyotlar:

1. Visshaya matematika dlya ekonomistov pod red. S.V. Kremena. M., «Visshaya shkola», 1998 g.
2. Danko P.E. i dr. Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. I, II. M., «Visshaya shkola», 1998 g.
3. Jo'rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. Toshkent, «O'zbekiston», 1995 y.
4. Zamkov O.O. i dr. Matematicheskie metodi v ekonomike. M., DIS, 1999 g.
5. Latipov X. va boshqalar. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, «O'zbekiston», 1996 y.
6. Minorskiy V.P. Oliy matematikadan masalalar to'plami. Toshkent, «O'qituvchi», 1988 y. va keyingi nashrlar.
7. Rajabov F., Nurmetov A. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, «O'qituvchi», 1990 y.
8. Sa'dullaev A. va boshqalar. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. I. Toshkent, «O'zbekiston», 1993 y.
9. Soatov Yo.U. Oliy matematika kursi. I, II, III Toshkent, «O'qituvchi», 1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Bugrov A.S., Nikolskiy S.M. Elementi lineynoy algebri i analiticheskoy geometrii. M., «Nauka», 1989 g.
2. Vashchenko T.V. Matematika finansovogo menedjmenta, M., «Perspektiva», 1996 g.
3. Zaytsev I.A. Visshaya matematika. M., «Visshaya shkola», 1991 g.
4. Kochovich E. Finansovaya matematika. M., «Statistika», 1994 g.
5. Masagutova R.V. Matematika dlya ekonomistov. Tashkent, «O'qituvchi», 1996 g.
6. Spravochnik po matematike dlya ekonomistov pod red. V.I. Ermakova. M., «Visshaya shkola», 1987 g.
7. Shipachyov V.S. Visshaya matematika. M., «Visshaya shkola», 1999 g.
8. Shodiev T. Analitik geometriya va chizikli algebra. Toshkent, «O'qituvchi» 1988 y.

Mundarija

1-Ma'ruza. Matritsalar va ular ustida amallar.....	4
1. Matritsa haqida tushuncha.....	4
2. Matritsalar ustida amallar	4
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	6
2-Ma'ruza. Determinantlar va ularning xossalari .	8
1. 2-tartibli determinantlar.Determinantlarning asosiy xossalari.....	8
2. 3-tartibli determinantlar.....	8
3. n-tartibli determinantlar.....	10
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	11
3-Ma'ruza. Determinantlarning xossalari.....	14
1. Minor va Algebraik to'ldiruvchilar haqida tushuncha.....	14
2. Determinantlarning xossalari.....	14
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	16
4-Ma'ruza.Teskari matritsa va uni qurish.....	18
1. Kvadrat matritsa determinanti.....	18
2. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari.....	18
3. Teskari matritsa haqida tushuncha.....	20
4. Teskari matritsa qurish algoritmlari.....	21
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	24
5-Ma'ruza. Chiziqli tenglamalar sistemasi asosiy tushunchalari.....	26
1. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Sistemaning yechimi.....	26
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.....	27
3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas yechimlari mavjudligi shartlari.....	29
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	30
6-Ma'ruza. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari.....	32
1. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish.....	32
2. Sistemaning umumiy yechimi. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi.....	33
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	36
7-Ma'ruza. Arifmetik vektorlar va ular ustida amallar.....	39
1. n- o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo. Arifmetik vektor haqida tushuncha.....	39
2. Arifmetik vektorlar ustida chiziqli amallar va ularning xossalari.....	39
3. Arifmetik vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Vektor uzunligi. Skalyar ko'paytma xossalari.....	40
4. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Vektorlar orasidagi burchak. Uchburchak tengsizligi.....	40
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	42
8-Ma'ruza. Vektorlar sistemasi.....	43
1. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini vektor tenglama shaklida yozish.....	43
2. Vektorni berilgan vektor sistemasi bo'yicha yoyish.....	44
3. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar sistemalari.....	45

Mustaqil ishlash uchun misollar.....	47
9-Ma'ruza. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi. Kanonik bazis....	49
1. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi.....	49
2. Ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari.....	50
3. R_n fazoda bazis va koordinatalar. Kanonik bazis.....	51
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	53
10-Ma'ruza. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi. Chiziqli tenglamalar sistemi umumiy yechimi vektor shakli.....	54
1. Vektor ko'rinishida yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining Birgalikdalik va aniqlik shartlari.	54
2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi.....	55
3. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemi umumiy yechimi vektor shakli.....	56
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	57
11-Ma'ruza. Chiziqli algebra usullarining ba'zi chiziqli iqtisodiy modellarning tahlilida qo'llanilishi.....	59
1. Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Rejalashtirishning asosiy masalasi.....	59
2. Bilvosita xarajatlar haqida tushuncha . To'la xarajatlar haqida tushuncha.....	61
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	62
12-Ma'ruza. Chiziqli fazo.Yevklid fazo.....	64
1. Chiziqli fazo va uning o'chovi n o'chovli fazoda bazis va koordinatalar.....	64
2. Yevklid fazo. Bazisni almashtirish. Ortogonal matritsa.....	65
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	68
13-Ma'ruza. Chiziqli operatorlar va ular ustida amallar.....	70
1. Chiziqli operator va uning matritsasi.....	70
2. Chiziqli operatorlar ustida amallar.....	70
3. Chiziqli operator xos vektori va xos qiymati.....	71
4. Chiziqli operator matritsasini diagonal ko'rinishga keltirish.....	72
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	74
14-Ma'ruza. Kvadratik shakllar va ularni kanonik ko'rinishga keltirish.....	76
1. Musbat matritsalar. Ularning xos qiymatlari va xos vektorlarining xossalari.....	76
2. Kvadratik shakllar va ularni kanonik ko'rinishga keltirish.....	76
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	79
15-Ma'ruza.Tekislikda analitik geometriya elementlari. Tekislikda to'g'ri chiziq.....	80
1. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishidagi tenglamalari.....	80
2. Berilgan bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallellik va Perpendikulyarlik shartlari.....	82

3. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa.....	83
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	85
16-Ma'ruza. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.....	87
1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha. Ellips va uning kanonik tenglamasi.....	87
2. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.....	89
3. Parabola va uning kanonik tenglamasi.....	90
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	92
17-Ma'ruza. Fazoda analitik geometriya elementlari. Fazoda tekislik..	94
1. Fazoda tekislikning turli ko'rinishdagi tenglamalari. Nuqtasi va normal vektori bilan berilgan tekislik tenglamasi.....	94
2. Berilgan uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.....	95
3. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha masofa.....	96
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	97
18-Ma'ruza. Fazoda to'g'ri chiziq.....	100
1. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari...	100
2. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari.....	102
Mustaqil ishlash uchun misollar.....	103
Adabiyotlar.....	105